CORRIGÉ DM N°11 : AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES, 2009

- PRÉLIMINAIRES -

1. Les égalités $\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} t_i z_i = 1$ donnent $\sum_{i=1}^{n} t_i(1-z_i) = 0$. Puisque $|z_i| \leqslant 1$ et z_i réel, on a $(1-z_i) \geqslant 0$ donc $t_i(1-z_i) \geqslant 0$ pour tout i.
On en déduit $t_i(1-z_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et puisque les t_i sont strictement positifs :

$$\boxed{z_i = 1 \text{ pour tout } i \in [\![1,n]\!].}$$

2. En posant $\mathrm{Z} = \sum_{i=1}^{n} t_i z_i$, on a $\sum_{i=1}^{n} t_i \left(\frac{z_i}{\mathrm{Z}}\right) = 1$ donc, en notant $z_i' = \mathscr{Re}\left(\frac{z_i}{\mathrm{Z}}\right)$, on a $\sum_{i=1}^{n} t_i z_i' = 1$.

Or, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|z_i'| = \left|\mathscr{Re}\left(\frac{z_i}{\mathrm{Z}}\right)\right| \leqslant \frac{|z_i|}{|\mathrm{Z}|} = |z_i| \leqslant 1$ (puisque $|\mathrm{Z}| = 1$ par hypothèse).

D'après la question précédente, on a $z_i' = 1$ pour tout i, soit $\mathscr{Re}\left(\frac{z_i}{\mathrm{Z}}\right) = 1$. Puisque $\left|\frac{z_i}{\mathrm{Z}}\right| \leqslant 1$, cela implique $\frac{z_i}{\mathrm{Z}} = 1$ pour tout i, soit

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ z_i = \mathrm{Z} \text{ avec } |\mathrm{Z}| = 1.}$$

- PARTIE I -

1. La somme des deux colonnes de $\mathrm{P}_{x,y}$ est la colonne $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ donc 1 est valeur propre de $\mathrm{P}_{x,y}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.
La trace de la matrice $\mathrm{P}_{x,y}$ est $1 - \frac{x+y}{2}$, donc l'autre valeur propre de $\mathrm{P}_{x,y}$ est $-\frac{x+y}{2}$.
Deux cas se présentent :

– Si $x+y \neq -2$, $\mathrm{P}_{x,y}$ possède deux valeurs propres distinctes donc est diagonalisable. Le système $\mathrm{P}_{x,y}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = -\frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ équivaut à $(1+y)a + (1+x)b = 0$, donc un vecteur propre associé à la valeur propre $-\frac{x+y}{2}$ est par exemple $\begin{pmatrix}-1-x\\1+y\end{pmatrix}$.

– Si $x+y = -2$, alors 1 est valeur propre double. La matrice $\mathrm{P}_{x,y}$ est alors diagonalisable si et seulement si elle est semblable, donc égale, à I_2, c'est-à-dire si et seulement si $x = y = -1$. Dans ce cas, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $\mathbb{R}^2$ tout entier ; sinon, le sous-espace propre associé est la droite déjà trouvée, de base $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

En conclusion :

$$\boxed{\mathrm{P}_{x,y} \text{ est diagonalisable si et seulement si } x+y \neq -2 \text{ ou } x = y = -1.}$$

2. a) Ici on a forcément $x+y \neq -2$. Si Q est la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres trouvés précédemment on a :

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix}1 & -1-x\\ 1 & 1+y\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{P}_{x,y}\mathrm{Q} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{x+y}{2}\end{pmatrix}$$

ce qui est le résultat voulu avec $u = -\frac{x+y}{2} \in]-1,1[$ et $\mathrm{U} = \mathrm{Q}^{-1}$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on aura donc $P_{x,y} = U^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & u^k\end{pmatrix}U$ donc, par continuité de l'application linéaire $M \mapsto U^{-1}MU$ (l'espace $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ étant de dimension finie), et puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k = 0$, on en déduit

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} P_{x,y}^k = U^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U = L.}$$

La matrice L est de rang 1 ; il s'agit de la matrice de la projection sur la droite vectorielle associée à la valeur propre 1 parallèlement à celle associée à la valeur propre $-\dfrac{x+y}{2}$.

c) C'est du calcul : on a vu que $U^{-1} = Q = \begin{pmatrix}1 & -1-x\\ 1 & 1+y\end{pmatrix}$. $\det Q = 2+x+y$ donc d'après des formules vues en cours $U = Q^{-1} = \dfrac{1}{2+x+y}\begin{pmatrix}1+y & 1+x\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à effectuer le produit $U^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U$...

Autre solution plus élégante :

L est la matrice de la projection sur la droite de base $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ parallèlement à celle de base $\begin{pmatrix}-1-x\\ 1+y\end{pmatrix}$, donc si $a, b \in \mathbb{R}^2$, le vecteur $\begin{pmatrix}a'\\ b'\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ doit vérifier $a' = b'$ et $\begin{pmatrix}a'\\ b'\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}-1-x\\ 1+y\end{pmatrix}$ ce qui conduit par soustraction des deux égalités à $\lambda(2+x+y) = a-b$ puis $a' = b' = a - \dfrac{a-b}{2+x+y}(1+x) = \dfrac{1}{2+x+y}\left[(1+y)a + (1+x)b\right]$, et on obtient ainsi l'expression analytique de la projection dont la matrice est

$$\boxed{L = \frac{1}{2+x+y}\begin{pmatrix}1+y & 1+x\\ 1+y & 1+x\end{pmatrix}.}$$

3. Pas de question n°3...

4. $\chi_A = X^2 - (\operatorname{tr} A)X + \det A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ donc

$$\boxed{\Delta_A = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc.}$$

5. Les coefficients de A étant strictement positifs, on a évidemment $\boxed{\Delta_A \geqslant 4bc > 0.}$

6. Le discriminant de χ_A étant strictement positif, χ_A possède deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2. On a $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = a + d > 0$. Si on suppose $\lambda_1 > \lambda_2$, on en déduit immédiatement

$$\boxed{\lambda_1 > |\lambda_2|.}$$

7. Puisque A possède deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable ; il existe donc une matrice P inversible telle que $A = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}$ d'où pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $A^k = P\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}P^{-1}$.

Plusieurs cas sont à considérer :

- Si $\lambda_1 < 1$ (on rappelle que $\lambda_1 > 0$), alors $|\lambda_2| < 1$. Donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\lambda_1^k = \lim\limits_{k\to+\infty}\lambda_2^k = 0$ et, pour des raisons déjà invoquées, on en déduit $\lim A^k = O_2$.
- Si $\lambda_1 = 1$, alors $|\lambda_2| < 1$ et on aura $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1} = L$, où L est la matrice de la projection sur le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_1 (c'est une droite), parallèlement au sous-espace propre associé à la valeur propre λ_2.

  On a vu dans l'exemple précédent comment on peut obtenir facilement cette matrice.

– Enfin, si $\lambda_1 > 1$, la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est évidemment divergente.

8. – Dans le cas $\lambda_1 = 1$, on peut considérer une matrice du type $P_{x,y}$ vue dans la question 1. Ses valeurs propres sont 1 et $-\dfrac{x+y}{2}$, et les coefficients de cette matrice sont strictement positifs dès que $|x| < 1$ et $|y| < 1$. Il suffit alors de prendre $x = y = -\lambda_2$, et cette condition sera vérifiée puisque $|-\lambda_2| < \lambda_1 = 1$.

– Dans le cas général, puisque λ_1 est strictement positif, on peut trouver par la méthode précédente une matrice du type voulu dont les valeurs propres sont 1 et $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Il suffit ensuite de la multiplier par λ_1.

- PARTIE II -

II.A.

1. a) Puisque I_n et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme :

$$C^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \beta^{k-i} B^i = \sum_{i=0}^{\ell-1} \binom{k}{i} \beta^{k-i} B^i$$

puisque $B^i = 0$ dès que $i \geqslant \ell$.

b) Le résultat est immédiat si $\beta = 0$ puisque alors $C^k = 0$ dès que $k \geqslant \ell$.

On peut donc supposer $\beta \neq 0$. Soit $i \in [\![0, \ell-1]\!]$ fixé, et posons $u_k = \dbinom{k}{i}\beta^{k-i}$. Alors $\left|\dfrac{u_{k+1}}{u_k}\right| = |\beta| \dfrac{\binom{k+1}{i}}{\binom{k}{i}} = |\beta| \dfrac{k+1}{k+1-i} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} |\beta| < 1$. D'après la règle de d'Alembert pour les suites numériques, on en déduit $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$.

Ainsi, C^k est une somme de ℓ termes qui tendent tous vers O_2, donc

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} C^k = O_2.}$$

2. a) i. D'après le cours sur les noyaux itérés, la suite des $\operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ est strictement croissante jusqu'à un certain rang p, puis est stationnaire (*savoir refaire les démonstrations le jour du concours !*). On aura donc $F_\alpha = \operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)^p$.

Cela prouve que $\boxed{F_\alpha \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^n\text{, stable par A}}$ (car noyau d'un polynôme en A, encore un résultat du cours).

Remarque importante pour la suite :

En fait, p est égal à l'ordre de multiplicité de α dans le polynôme minimal de A ; en effet, si le polynôme minimal de A s'écrit $\pi_A = (X - \alpha)^q Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$, on aura d'après le théorème de décomposition des noyaux $\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)^q \oplus \operatorname{Ker}(Q(A))$.

Si on a $p > q$, alors π_A divise le polynôme $(X-\alpha)^p Q$; ce polynôme est donc annulateur de A et, toujours d'après le théorème de décomposition des noyaux, $\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker}(A-\alpha I_n)^p \oplus \operatorname{Ker}(Q(A))$. Puisque $\operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)^q \subset \operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)^p$, on en déduit pour des raisons de dimensions, $\operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)^q = \operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)^p$, ce qui contredit la définition de p.

Donc $p \leqslant q$; si on avait $p < q$, le polynôme $(X - \alpha)^p Q$ ne pourrait être annulateur de A, donc $\operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)^p \oplus \operatorname{Ker}(Q(A))$ serait strictement inclus dans E, et puisque $\operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)^p \subset \operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)^q$ on aurait pour des raisons de dimension $\operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)^p \subsetneq \operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)^q$ ce qui là encore contredit la définition de p.

ii. On a, par définition, $\left(A_\alpha - \alpha \mathrm{Id}_{F_\alpha}\right)^p = 0$ soit $A_\alpha = \alpha \mathrm{Id}_{F_\alpha} + B_\alpha$ avec B_α nilpotent (d'indice p). D'après **II.1.b** on a donc bien

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} A_\alpha^k = 0\,.}$$

b) Le corps de base étant $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de A est scindé. Notons $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^{q} (X-\alpha_i)^{m_i}$, où les α_i sont les valeurs propres distinctes de A et m_i l'ordre de multiplicité de α_i.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_A est annulateur de A et d'après le théorème de décomposition des noyaux (admis en début d'énoncé) on a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{q} \operatorname{Ker}(A-\alpha_i I_n)^{m_i}\,.$$

Remarque :

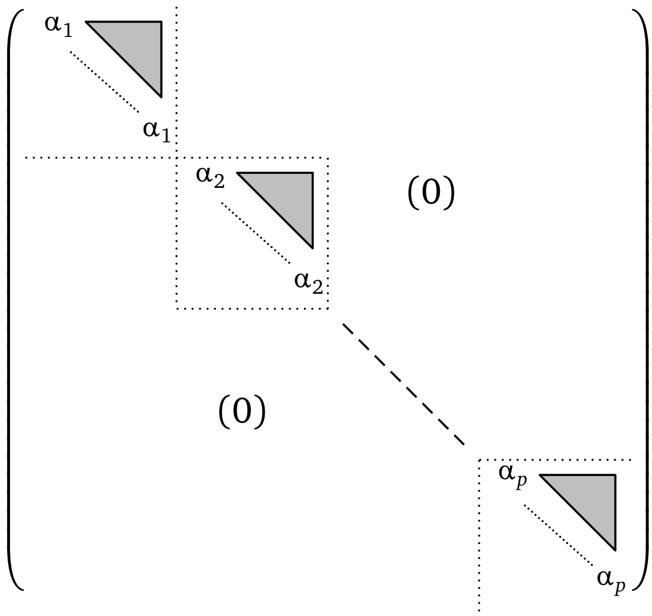
Les sous-espaces $F_i = \operatorname{Ker}(A-\alpha_i I_n)^{m_i}$ sont en fait les sous-espaces caractéristiques F_{α_i} : en effet, on a vu en **2.a** que $F_{\alpha_i} = \operatorname{Ker}(A-\alpha_i I_n)^{p_i}$ où p_i est l'ordre de multiplicité de α_i dans le polynôme minimal π_A ; puisque π_A divise χ_A, on aura $p_i \leqslant m_i$ donc $\operatorname{Ker}(A-\alpha_i I_n)^{m_i} = \operatorname{Ker}(A-\alpha_i I_n)^{p_i}$ puisque la suite des noyaux itérés $\operatorname{Ker}(A-\alpha_i I_n)^k$ est stationnaire à partir du rang p_i.

Chaque sous-espace $F_i = \operatorname{Ker}(A-\alpha_i I_n)^{m_i}$ est stable par A, et en notant A_i l'endomorphisme induit par A sur ce sous-espace, on a $A_i = \alpha_i \mathrm{Id}_{F_i} + B_i$, où B_i est nilpotent (d'indice $\leqslant m_i$). Puisque l'on suppose $|\alpha_i| < 1$, on déduit encore de **II.1.b** que $\lim_{k\to+\infty} A_i^k = 0$. Cela signifie que la suite $(A^k x)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 pour tout vecteur x de F_i, et puisque $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{q} F_i$, on aura $\lim_{k\to+\infty} A^k x = 0$ pour tout vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ par linéarité. Par conséquent :

$$\boxed{\text{Si } \rho(A) < 1,\ \lim_{k\to+\infty} A^k = O_n\,.}$$

Remarque utile pour la suite :

En reprenant les notations ci-dessus, si l'on se place dans une base formée de la réunion des sous-espaces caractéristiques F_i, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A sera diagonale par blocs, chaque bloc étant la matrice d'un endomorphisme de F_i de la forme $\alpha_i \mathrm{Id}_{F_i} + b_i$ avec b_i nilpotent. Par trigonalisation, on peut même trouver une base où cette matrice sera de la forme



Deux matrices semblables ayant même polynôme caractéristique, on a aussi, en faisant un calcul par blocs, $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^{q} (X-\alpha_i)^{\dim F_i}$, ce qui prouve que $\dim F_i = m_i$ pour tout i ; ainsi, pour résumer les résultats de toutes nos remarques, on a :

> Le sous-espace caractéristique F_α associé à une valeur propre α de A est égal à $\mathrm{Ker}(A-\alpha I_n)^p$ où p est l'ordre de multiplicité de α dans le polynôme minimal de A, et sa dimension est égale à l'ordre de multiplicité de α dans le polynôme caractéristique de A.

c) On suppose ici $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$. Si α est une valeur propre de A et si $x \neq 0$ est un vecteur propre associé, on aura $Ax = \alpha x$ puis par une récurrence facile, $A^k x = \alpha^k x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha^k x = 0$ ce qui implique $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha^k = 0$ donc $|\alpha| < 1$. Cela étant valable pour toute valeur propre de A on en déduit :

$$\boxed{\text{Si } \lim_{k\to+\infty} A^k = 0 \text{ alors } \rho(A) < 1.}$$

II.B.

1. Les valeurs propres de $\dfrac{1}{\gamma}A$ sont les $\dfrac{\alpha}{\gamma}$ avec $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$. Ainsi, $\rho(A/\gamma) = \dfrac{\rho(A)}{\gamma}$, et la suite $\left((A/\gamma)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 si et seulement si $\rho(A/\gamma) < 1$ soit $\rho(A) < \gamma$. Donc

$$\boxed{\text{L'ensemble des réels } \gamma \text{ tels que la suite } \left((A/\gamma)^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ tende vers } 0 \text{ est l'intervalle }]\rho(A),+\infty[.}$$

2. On a $A^2y = Ay + Ax = y + 2x$ puis $A^3y = Ay + 2Ax = y + 3x$ etc.. et par une récurrence facile $A^k y = y + kx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.Puisque x est non nul, la suite $(A^k y)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, donc ne peut être inclus dans un compact (rappelons que, dans tout espace vectoriel normé , une partie compacte est nécessairement fermée et bornée, la réciproque étant vraie en dimension finie).

3. a) Si $\rho(A) < 1$, la suite (A^k) tend vers 0 ce qui est exclu ici. Donc $\rho(A) \geqslant 1$.

Soit γ un réel > 1. Alors la suite $\left((A/\gamma)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 puisque A^k tend vers B et $\dfrac{1}{\gamma^k}$ tend vers 0. On a donc $\gamma > \rho(A)$ d'après **II.B.1**. Cela étant vrai pour tout réel $\gamma > 1$, on a $\rho(A) \leqslant 1$. Finalement :

$$\boxed{\text{Si } \lim_{k\to+\infty} A^k = B \neq 0 \text{ alors } \rho(A) = 1.}$$

b) Soit α une valeur propre de A telle que $|\alpha| = 1$, et soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k x = \alpha^k x$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha^k x = Bx$. x étant non nul, il existe une de ses coordonnées $x_i \in \mathbb{C}$ telle que $x_i \neq 0$. La suite complexe $(\alpha^k x_i)$ converge dans $\mathbb{C}$ vers le complexe $(Bx)_i$ donc la suite α^k converge (vers $(Bx)_i/x_i$)).
Soit $\ell = \lim\limits_{k\to+\infty} \alpha^k$. α étant de module 1, il en est de même des α^k donc de ℓ, d'où $\ell \neq 0$. De plus $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha^{k+1} = \ell = \alpha\ell$. Donc $\boxed{\alpha = 1.}$

c) Si F_1 n'est pas égal à $\mathrm{Ker}(A - I_n)$, alors $\mathrm{Ker}(A - I_n) \subsetneq \mathrm{Ker}(A - I_n)^2$. Il existe donc y tel que $(A - I_n)y \neq 0$ et $(A - I_n)^2 y = 0$. En posant $x = (A - I_n)y$ on aura $Ay = y + x$ et $Ax = x$ avec $x \neq 0$. La suite $(A^k y)$ n'est donc pas bornée d'après **II.B.2**, alors qu'elle converge vers By : contradiction. Ainsi

$$\boxed{F_1 = \mathrm{Ker}(A - I_n).}$$

- PARTIE III -

1. C'est immédiat : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(Aw)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$ donc $Aw = w$ équivaut à $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$ pour tout i (de plus les coefficients de A sont ici supposés positifs).

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{P}_n\,,\ A \in \mathscr{S}_n \Longleftrightarrow Aw = w.}$$

2. – Posons $\mathrm{AB} = \mathrm{C}$. Avec les notations usuelles on a

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2 \ , \ c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k}$$

donc si les coefficients de A et de B sont positifs, il en est de même de ceux de C.

$$\boxed{\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathscr{P}_n \Rightarrow \mathrm{AB} \in \mathscr{P}_n.}$$

– Si de plus A et B appartiennent à $\mathscr{S}_n$ alors $\mathrm{A}w = \mathrm{B}w = w$ donc $(\mathrm{AB})w = w$ et $\mathrm{AB} \in \mathscr{S}_n$ d'après la question précédente.

$$\boxed{\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n \Rightarrow \mathrm{AB} \in \mathscr{S}_n.}$$

3. a) Soit $v \in \mathscr{B}$. Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\left|(\mathrm{A}v)_i\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{i,j}}_{\in \mathbb{R}_+} v_i\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \underbrace{\left|v_i\right|}_{\leqslant 1} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

donc

$$\boxed{\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n \text{ et } v \in \mathscr{B} \Rightarrow \mathrm{A}v \in \mathscr{B}.}$$

b) Soit α une valeur propre de A, et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $v = \dfrac{x}{\|x\|_\infty} \in \mathscr{B}$ (où $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left|x_i\right|$).

D'après ce qui précède, $\mathrm{A}v \in \mathscr{B}$, soit $\|\mathrm{A}v\|_\infty \leqslant 1$ d'où $\|\mathrm{A}x\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty$ (en d'autres termes, la norme subordonnée de A pour la norme $\| \ \|_\infty$ est $\leqslant 1$). Puisque $\mathrm{A}x = \alpha x$ et $\|x\|_\infty \neq 0$, on en déduit $|\alpha| \leqslant 1$, donc $\rho(\mathrm{A}) \leqslant 1$.

Mais $\mathrm{A}w = w$, c'est-à-dire que 1 est valeur propre de A donc

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n,\ \rho(\mathrm{A}) = 1.}$$

4. a) On a donc ici $\mathrm{A}v = \alpha v$ avec $v \neq 0$et $|\alpha| = 1$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\left|v_i\right| = \|v\|_\infty$, de sorte que $v_i \neq 0$ et $\left|\dfrac{v_j}{v_i}\right| \leqslant 1$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

L'égalité $\mathrm{A}v = \alpha v$ implique en particulier $(\mathrm{A}v)_i = \alpha v_i$ d'où $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{v_j}{v_i} = \alpha$ $(*)$. En appliquant les résultats de la question préliminaire avec $t_j = a_{i,j}$ et $z_j = \dfrac{v_j}{v_i}$ (on a bien $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$, les t_j réels strictement positifs et $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_j z_j\right| = |\alpha| = 1$), on en déduit qu'il existe un nombre complexe z de module 1 tel que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{v_j}{v_i} = z$. En appliquant cette relation à $j = i$, on obtient $z = 1$ donc tous les v_j sont égaux, donc v est proportionnel à w. Enfin, en remplaçant dans $(*)$, on trouve $\alpha = 1$. Finalement :

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{A} \in \mathscr{P}_n^{>0} \cap \mathscr{S}_n, \text{ la seule valeur propre de A de module 1 est 1 et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par } w.}$$

b) Si μ était non nul, on pourrait appliquer les résultats de **II.B.2** avec $x = \mu w$ et $y = v$. La suite $(\mathrm{A}^k v)$ ne serait donc pas bornée. Or $\mathrm{A}^k v \in \mathscr{B}$ pour tout entier k puisque $\mathscr{B}$ est stable par A d'après **III.3**. Il y a donc contradiction, et finalement, on a bien

$$\boxed{\mu = 0.}$$

c) On remarque déjà que, d'après **4.a**, $\mathrm{Ker}(A-I_n)$ est la droite vectorielle de base w.

On procède alors comme dans **II.3.c** : Si F_1 n'est pas égal à $\mathrm{Ker}(A-I_n)$, alors $\mathrm{Ker}(A-I_n) \subsetneq \mathrm{Ker}(A-I_n)^2$. Il existe donc $v \in \mathbb{C}^n$ tel que $(A-I_n)v \neq 0$ (donc $v \neq 0$) et $(A-I_n)^2 v = 0$. Quitte à diviser v par $\|v\|_\infty$, on peut supposer $v \in \mathscr{B}$. En posant $x = (A-I_n)v$ on aura $Av = v + x$ et $Ax = x$ avec $x \neq 0$. $x \in \mathrm{Ker}(A-I_n) = \mathrm{Vect}(\{w\})$ donc il existerait $\mu \neq 0$ tel que $x = \mu w$, soit $Av = v + \mu w$ ce qui contredit le résultat précédent.

Or on a vu en **II.A.2.b** que la dimension de chaque sous-espace caractéristique est égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante. Ici $F_1 = \mathrm{Ker}(A-I_n)$ est de dimension 1 donc

$$\boxed{\text{Pour } A \in \mathscr{P}_n^{>0} \cap \mathscr{S}_n,\ 1 \text{ est valeur propre simple de } A.}$$

d) Notons $G_1 = \mathrm{Im}(A-I_n)$; puisque $F_1 = \mathrm{Ker}(A-I_n)$ est de dimension 1, le théorème du rang donne $\dim G_1 = n-1$.

D'autre part, soit $x \in F_1 \cap G_1$; supposons x non nul ; $x \in G_1$ donc il existe v tel que $x = (A-I)v$, et quitte à remplacer x par $\dfrac{x}{\|v\|_\infty}$ ($v \neq 0$ puisque $x \neq 0$), on peut supposer $v \in \mathscr{B}$. De plus, $x \in F_1$ donc il existe μ tel que $x = \mu w$. On a ainsi $Av = v + \mu w$ avec $v \in \mathscr{B}$ et $\mu \neq 0$, ce qui est impossible d'après **4.b**.

On a donc $F_1 \cap G_1 = \{0\}$, et F_1 et G_1 sont donc supplémentaires. De plus, G_1 est stable par A puisqu'il est de la forme $\mathrm{Im}(P(A))$ avec P polynôme (résultat du cours). Dans une base formée de w et d'une base de G_1, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est donc de la forme $\begin{bmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,0} & B \end{bmatrix}$ avec $B \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. En notant U la matrice de passage cette nouvelle base à la base canonique, on aura bien

$$\boxed{A = U^{-1} \begin{bmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,0} & B \end{bmatrix} U \text{ avec } B \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C}).}$$

Enfin, un calcul par blocs donne $\chi_A = (1-X)\chi_B$. Les valeurs propres de B sont donc celle de A exceptée 1 (car 1 est valeur propre simple). Comme toute valeur propre de A autre que 1 est de module < 1 d'après **3.b** et **4.a**, on en déduit $\boxed{\rho(B) < 1.}$

e) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = U^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B^k \end{bmatrix} U$. Puisque $\rho(B) < 1$ la suite $(B^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers O_{n-1}, donc la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice $L = U^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O_{n-1} \end{bmatrix} U$, qui est la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A-I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(A-I_n)$. Cette matrice est évidemment de rang 1.

f) Puisque L est la matrice d'une projection sur $\mathrm{Vect}(\{w\})$, les vecteurs colonnes de L sont tous proportionnels à w. Donc L est bien de la forme

$$L = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}.$$

De plus, par continuité de l'application linéaire $M \mapsto Mw$, puisque $A^k w = w$ pour tout entier k, on aura $Lw = w$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$.

Les coefficients de A étant des réels positifs, il en est de même de ceux des A^k donc par passage à la limite, les u_i sont des réels positifs.

(*on pouvait aussi évoquer le fait que l'ensemble* $\mathscr{S}_n$ *est un fermé comme intersection de fermés images réciproques de fermés par des applications continues, donc* L *appartient à* $\mathscr{S}_n$ *d'après la caractérisation séquentielle des fermés*).

Il reste à démontrer que les u_i sont strictement positifs. Si l'on avait, par exemple $u_1 = 0$, cela signifierait que l'image par L du premier vecteur e_1 de la base canonique est nulle, donc que $e_1 \in \mathrm{Im}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$.

Il existerait donc $y \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathrm{A}y - y = e_1$. Puisque $\mathrm{A}w = w$, le vecteur $z = y - y_1 w$ vérifie aussi $\mathrm{A}z - z = e_1$. En écrivant les coordonnées de ces vecteurs, on obtient un système de n équations. Les $n-1$ dernières équations s'écrivent

$$\forall i \in [\![2,n]\!]\ ,\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_j = z_i\,.$$

Par construction de z, on a $z_1 = 0$. Si l'un des z_i pour $i \geqslant 2$ était non nul, en considérant l'indice i_0 tel que $\left|z_{i_0}\right| = \max\limits_{2\leqslant i\leqslant n} \left|z_i\right| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left|z_i\right|$, on obtiendrait $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \frac{z_j}{z_{i_0}} = 1$ avec $\left|\dfrac{z_j}{z_{i_0}}\right| \leqslant 1$ pour tout j et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} = 1$ avec les $a_{i_0,j} > 0$ donc d'après le résultat de la question préliminaire, on aurait tous les z_j égaux. Mais dans ce cas, z serait nul puisque $z_1 = 0$, d'où la contradiction.

g) Puisque $\chi_{{}^t\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{A}}$, 1 est aussi valeur propre simple de ${}^t\mathrm{A}$, et $\mathrm{Ker}({}^t\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$ est une droite vectorielle. Si z est un vecteur propre de ${}^t\mathrm{A}$ pour la valeur propre 1, on a ${}^t\mathrm{A}z = z$ d'où $({}^t\mathrm{A})^k z = z$ soit ${}^t\mathrm{A}^k z = z$. Par passage à la limite (par continuité de l'application linéaire $\mathrm{M} \mapsto {}^t\mathrm{M}$), on obtient ${}^t\mathrm{L}z = z$. Donc z appartient nécessairement à l'image de ${}^t\mathrm{L}$; la matrice ${}^t\mathrm{L}$ est une matrice de rang 1 dont les colonnes sont toutes égales au vecteur u de coordonnées $(u_1,\dots,u_n)$, donc z est colinéaire à u.

Réciproquement, compte tenu de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$ il est facile de vérifier que ${}^t\mathrm{L}u = u$. Par conséquent

$$\boxed{\mathrm{Ker}({}^t\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) \text{ est la droite vectorielle de base } u.}$$

h) Si ${}^t\mathrm{A}$ est aussi dans $\mathscr{S}_n$, $\mathrm{Ker}({}^t\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$ est la droite vectorielle engendrée par w d'après **4.a**. Donc u et w sont colinéaires ; la condition $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$ implique alors $u_i = \dfrac{1}{n}$ pour tout i. En conclusion :

$$\boxed{\text{Si A et } {}^t\mathrm{A} \text{ appartiennent à } \mathscr{P}_n^{>0} \cap \mathscr{S}_n, \text{ L est la matrice dont tous les termes sont égaux à } \frac{1}{n}.}$$

5. a) Notons encore L la matrice dont tous les termes sont égaux à $\dfrac{1}{n}$. Il est clair que L appartient à $\mathscr{S}_n$.

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n$ et, pour tout $t \in]0,1]$, $\mathrm{A}_t = (1-t)\mathrm{A} + t\mathrm{L}$. Les coefficients de A_t sont $\geqslant \dfrac{t}{n}$ (puisque les coefficients de A sont positifs) donc sont strictement positifs, et puisque $\mathrm{A}w = w$ et $\mathrm{L}w = w$, on aura $\mathrm{A}_t w = w$.

Ainsi, $\mathrm{A}_t \in \mathscr{P}_n^{>0} \cap \mathscr{S}_n$ pour tout $t \in]0,1]$. Puisque $\lim\limits_{t\to 0^+} \mathrm{A}_t = \mathrm{A}$, on obtient le résultat demandé :

$$\boxed{\mathscr{P}_n^{>0} \cap \mathscr{S}_n \text{ est dense dans } \mathscr{S}_n.}$$

b) Soit $(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{P}_n^{>0} \cap \mathscr{S}_n$ qui tend vers A. Soit alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_k un vecteur de base de $\mathrm{Ker}({}^t\mathrm{A}_k - \mathrm{I}_n)$ construit comme dans **4.g**.

Par construction, on a $\left\|u_k\right\|_\infty \leqslant 1$ pour tout k, donc la suite (u_k) est bornée. $\mathbb{C}^n$ étant de dimension finie, on peut en extraire une suite convergente $(u_{\varphi(k)})$, vers un vecteur que nous noterons v.

Puisque ${}^t\mathrm{A}_{\varphi(k)} \cdot u_{\varphi(k)} = u_{\varphi(k)}$, on obtient par passage à la limite ${}^t\mathrm{A}v = v$, c'est-à-dire $v \in \mathrm{Ker}({}^t\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$. Puisque les coordonnées de chaque vecteur $u_{\varphi(k)}$ sont positives, il en est de même de celles de v, et puisque la somme des coordonnées de chaque vecteur $u_{\varphi(k)}$ est égale à 1, il en est de même de celles de v (par simple passage à la limite). Il en résulte en particulier que v n'est pas nul, donc il s'agit bien d'un vecteur propre de ${}^t\mathrm{A}$ pour la valeur propre 1.

c) Il suffit de considérer la matrice unité I_n !

d) Il suffit de considérer la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$. On a bien $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n$, et $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$, donc A et la matrice d'une symétrie qui admet 1 et -1 comme valeurs propres.

- PARTIE IV -

IV.A.

1. Avec des notations classiques on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$(\mathrm{A}x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

Les $a_{i,j}$ étant strictement positifs et les x_j étant positifs non tous nuls, on a bien

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ (\mathrm{A}x)_i > 0.}$$

2. La relation donnée implique que α est strictement positif, puis que la matrice $\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{A}$ appartient à $\mathscr{P}_n^{>0} \cap \mathscr{S}_n$. 1 est donc valeur propre (simple) de $\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{A}$, donc α est valeur propre de A.

De plus, toujours d'après les résultats de la partie **III.**, $\rho\left(\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{A}\right) = 1$ donc $\rho(\mathrm{A}) = \alpha$.

3. a) De façon claire, puisque tout est positif :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ (\mathrm{A}x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_j = (\mathrm{B}x)_i\,.$$

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathscr{P}_n,\ \mathrm{A} \leqslant \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}x \leqslant \mathrm{B}x \text{ pour tout } x \text{ à coordonnées positives.}}$$

b) Par une première récurrence sur k, il est facile de montrer que, si $\mathrm{A} \in \mathscr{P}_n$ et si x est un vecteur à coordonnées positives, alors $\mathrm{A}^k x$ est encore un vecteur à coordonnées positives.

Par une seconde récurrence sur k, on aura, si $\mathrm{A} \leqslant \mathrm{B}$ sont dans $\mathscr{P}_n$, $\mathrm{A}^k x \leqslant \mathrm{B}^k x$ pour tout vecteur x à coordonnées positives. En effet :

- C'est immédiat pour $k = 0$ et cela vient d'être fait dans la question précédnete pour $k = 1$.
- Supposons donc $\mathrm{A}^{k-1}x \leqslant \mathrm{B}^{k-1}x$. En notant $y = \mathrm{A}^{k-1}x$ et $z = \mathrm{B}^{k-1}x$, on aura donc $0 \leqslant y_i \leqslant z_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ donc

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ (\mathrm{A}y)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} z_j = (\mathrm{B}z)_i$$

  d'où $\mathrm{A}y \leqslant \mathrm{B}z$ soit $\mathrm{A}^k x \leqslant \mathrm{B}^k x$.

En appliquant alors la relation $\mathrm{A}^k x \leqslant \mathrm{B}^k x$ aux vecteurs $x = e_j$ de la base canonique, on obtient $(\mathrm{A}^k)_{i,j} \leqslant (\mathrm{B}^k)_{i,j}$ pour tous i, j, donc

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathscr{P}_n,\ \mathrm{A} \leqslant \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}^k \leqslant \mathrm{B}^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.}$$

c) On utilise ici les résultats de **II.B.1**. Soit γ un réel > 0. Si la suite $\left((\mathrm{B}/\gamma)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, puisque les coefficients de $(\mathrm{A}/\gamma)^k$ sont positifs et majorés par ceux de $(\mathrm{B}/\gamma)^k$ d'après la question précédente, la suite $\left((\mathrm{A}/\gamma)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers 0. Donc, si $\gamma \in \,]\rho(\mathrm{B}), +\infty[$ alors $\gamma \in \,]\rho(\mathrm{A}), +\infty[$ c'est-à-dire $]\rho(\mathrm{B}), +\infty[\, \subset \,]\rho(\mathrm{A}), +\infty[$ et par suite

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathscr{P}_n,\ \mathrm{A} \leqslant \mathrm{B} \Rightarrow \rho(\mathrm{A}) \leqslant \rho(\mathrm{B}).}$$

4. La matrice B considérée dans l'énoncé est bien à coefficients strictement positifs, et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = \alpha$. Or α est strictement positif, donc $\frac{1}{\alpha}\mathrm{B} \in \mathscr{P}_n^{>0} \cap \mathscr{S}_n$. D'après les résultats de **III.3.b**, $\rho\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{B}\right) = 1$ donc $\rho(\mathrm{B}) = \alpha$.
Mais, par définition de α, $b_{i,j} \leqslant a_{i,j}$ pour tous i,j donc $\mathrm{B} \leqslant \mathrm{A}$. D'après la question précédente, $\rho(\mathrm{B}) \leqslant \rho(\mathrm{A})$ donc $\boxed{\alpha \leqslant \rho(\mathrm{A}).}$

5. On reprend exactement la même matrice B qu'à la question précédente, avec β à la place de α. Le début des calculs est le même, mais à la fin, puisque ici $\beta = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right)$, on obtiendra $\mathrm{B} \geqslant \mathrm{A}$ d'où $\rho(\mathrm{B}) \geqslant \rho(\mathrm{A})$ donc $\boxed{\beta \geqslant \rho(\mathrm{A}).}$

Remarque :

On peut montrer que l'application qui à toute matrice $\mathrm{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ associe le réel $|||\mathrm{A}||| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|$ est la norme subordonnée de l'endomorphisme canoniquement associé à A lorsque l'on munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|\ \|_\infty$.
On a alors, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathrm{A}x\|_\infty \leqslant |||\mathrm{A}|||\,\|x\|_\infty$ et, lorsque x est un vecteur propre associé à une valeur propre λ de A cela donne $|\lambda| \leqslant |||\mathrm{A}|||$, d'où $\rho(\mathrm{A}) \leqslant |||\mathrm{A}|||$, ce qui est le résultat que l'on vient de démontrer dans un cas particulier (pour les matrices réelles positives seulement).

6. a) S est une matrice diagonale à éléments diagonaux non nuls, elle est donc de déterminant non nul donc inversible.

Multiplier à gauche par une matrice $\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ revient à faire les opérations élémentaires sur les lignes $\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda_i \mathrm{L}_i$, et multiplier à droite revient à faire les opérations sur les colonnes $\mathrm{C}_j \leftarrow \lambda_j \mathrm{C}_j$.
Ainsi, la matrice $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS}$ a pour coefficient d'indice (i,j) : $a_{i,j}\dfrac{x_j}{x_i}$.

b) Si on note B la matrice $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS}$, alors B est à coefficients strictement positifs et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \frac{(\mathrm{A}x)_i}{x_i}$.

L'hypothèse de l'énoncé implique donc $\gamma \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \leqslant \delta$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ donc $\gamma \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}$ et $\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \leqslant \delta$, et d'après les deux questions précédentes :

$$\boxed{\gamma \leqslant \rho(\mathrm{A}) \leqslant \delta.}$$

c) Par l'absurde, si l'on avait $(\mathrm{A}x)_i > \rho(\mathrm{A})x_i$ pour tout i, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $(\mathrm{A}x)_i \geqslant (\rho(\mathrm{A})+\varepsilon)x_i$ pour tout i, soit $\mathrm{A}x \geqslant (\rho(\mathrm{A})+\varepsilon)x$, et on aurait $\rho(\mathrm{A}) \geqslant \rho(\mathrm{A})+\varepsilon$ d'après la question précédente, ce qui est impossible.

7. Posons $y = \mathrm{A}x$. D'après **IV.A.1**, y a pour coordonnées des réels strictement positifs. Soit $z = y - \rho(\mathrm{A})x$. L'hypothèse de l'énoncé implique que z a pour coordonnées des réels positifs. Si z n'était pas nul, alors les coordonnées de $\mathrm{A}z = \mathrm{A}y - \rho(\mathrm{A})y$ seraient des réels strictement positifs d'après **IV.A.1**, donc on aurait $(\mathrm{A}y)_i > \rho(\mathrm{A})y_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, ce qui contredit le résultat de la question précédente.

Ainsi $z = 0$ soit $y = \rho(\mathrm{A})x$ ou encore : $\boxed{\mathrm{A}x = \rho(\mathrm{A})x.}$

8. a) On a $\mathrm{A}v = \alpha v$ donc pour tout i $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}v_j = \alpha v_i$ d'où $\left|\alpha v_i\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\left|v_j\right|$ soit $\rho(\mathrm{A})x_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$, c'est-à-dire $\rho(\mathrm{A})x \leqslant \mathrm{A}x$.

Les coordonnées de x sont des réels positifs et non tous nuls, ce qui permet quand même d'appliquer le résultat de la question précédente (le fait que *tous* les x_i soient strictement positifs n'avait pas servi...).

On a donc $Ax = \rho(A)x$ et

$$\boxed{x \text{ est bien un vecteur propre de A pour la valeur propre } \rho(A).}$$

b) x a pour coordonnées des réels positifs non tous nuls, donc d'après **IV.A.1** Ax a pour coordonnées des réels strictement positifs. Puisque $Ax = \rho(A)x$ et $\rho(A) > 0$, il en est de même de x.

c) Soit α une valeur propre de module $\rho(A)$ (il en existe forcément une), et soient v et x des vecteurs propres comme dans la question précédente, puis S la matrice associée à ce vecteur x comme dans la question **IV.A.6.a**, puis A' la matrice $S^{-1}AS$. On a déjà montré que $a'_{i,j} = a_{i,j}\dfrac{x_j}{x_i}$ pour tous i,j et que pour tout i, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a'_{i,j} = \frac{(Ax)_i}{x_i} = \rho(A)$ (puisque $Ax = \rho(A)x$). La matrice $\dfrac{1}{\rho(A)}A'$ appartient donc à $\mathscr{P}_n^{>0} \cap \mathscr{S}_n$ et d'après **II.4.d**, il existe $B \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ et $U \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\frac{1}{\rho(A)}A' = U^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}U \quad \text{avec de plus } \rho(B) < 1.$$

On aura alors puisque $A' = S^{-1}AS$:

$$A = SU^{-1}\begin{bmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & \rho(A)B \end{bmatrix}US^{-1} = V^{-1}\begin{bmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & B' \end{bmatrix}V \quad \text{avec } B' = \rho(A)B \text{ et donc } \rho(B') < \rho(A)$$

ce qui est le résultat demandé (aux notations près).

Remarque importante pour la suite : cette écriture de la matrice A *prouve que* $\rho(A)$ *est valeur propre simple de* A*, et que le sous-espace propre associé est une droite vectorielle.*

IV.B.

1. D'après **IV.A.8**, il existe un vecteur x dont les coordonnées sont des réels strictement positifs tel que $Ax = \rho(A)x$. En posant $y = \dfrac{x}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i}$, on aura bien y à coordonnées strictement positives, de somme 1 et $Ay = \rho(A)y$.

   Un tel vecteur est unique puisque le sous-espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ est une droite vectorielle, et ne contient donc qu'un seul vecteur de cette forme.

   On fait ensuite la même chose pour la matrice ${}^tA$, qui est bien dans $\mathscr{P}_n^{>0}$.

2. Ici $\rho(A) = 1$ donc $A = V^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B' \end{bmatrix}V$ avec $\rho(B') < 1$. On démontre alors exactement comme en **III.4.e** que la suite (A^k) converge vers L, matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Vect}(\{y\})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(A - I_n)$. Les vecteurs colonnes de L sont donc proportionnels à y donc L est de la forme

$$L = \begin{pmatrix} u_1y_1 & u_2y_1 & \dots & u_ny_1 \\ u_1y_2 & u_2y_2 & \dots & u_ny_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1y_n & u_2y_n & \dots & u_ny_n \end{pmatrix}$$

   La matrice ${}^tL$ est encore une matrice de rang 1 ; ses vecteurs colonnes sont colinéaires au vecteur $u = (u_1, \dots, u_n)$ et appartiennent à l'image de ${}^tL$, qui est engendrée par le vecteur z de la question précédente (puisque ${}^t\mathrm{A}z = z \Rightarrow {}^t\mathrm{A}^k z = z$ pour tout k, d'où ${}^t\mathrm{L}z = z$ par passage à la limite). Le vecteur u est donc colinéaire à z, et finalement il existe un réel a tel que

$$\mathrm{L} = a\begin{pmatrix} z_1y_1 & z_2y_1 & \dots & z_ny_1 \\ z_1y_2 & z_2y_2 & \dots & z_ny_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1y_n & z_2y_n & \dots & z_ny_n \end{pmatrix}.$$

Enfin, la condition $\mathrm{L}y = y$ donne $a\left(\sum_{i=1}^{n} y_iz_i\right) = 1$. Il y a donc une petite erreur d'énoncé :

$$\boxed{\text{La matrice L est la matrice } a(y_iz_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ avec } a = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} y_iz_i}.}$$

3. Soit B la matrice $\mathrm{B} = \dfrac{1}{\rho(\mathrm{A})}\mathrm{A}$. La matrice B vérifie les hypothèses de la question précédente, donc $\lim_{k\to+\infty} \mathrm{B}^k = \mathrm{L}$. D'après les questions précédentes, les coefficients $\ell_{i,j}$ de L sont des réels strictement positifs.

On aura donc : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j}^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \rho(\mathrm{A})^k \ell_{i,j}$ et par conséquent :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \lim_{k\to+\infty} a_{i,j}^{(k)} = +\infty.}$$

- PARTIE V -

1. La trace de A est la somme de ces éléments diagonaux, qui sont strictement positifs puisque $\mathrm{A} \in \mathscr{P}_3^{>0}$, donc $\operatorname{tr}\mathrm{A} > 0$.

On calcule : $(\mathrm{A}^2)_{i,i} = \sum_{j=1}^{3} a_{i,j}a_{j,i} = a_{i,i}^2 + \cdots$ donc $tr(\mathrm{A}^2) = \sum_{i=1}^{3} (\mathrm{A}^2)_{i,i} = a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2 + \cdots$ où les $\cdots$ sont des termes strictement positifs puisque $\mathrm{A} \in \mathscr{P}_3^{>0}$, d'où l'inégalité demandée.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}\right|^2 \leqslant (1^2 + 1^2 + 1^2)(a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2)$ soit $(\operatorname{tr}\mathrm{A})^2 \leqslant 3(a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2) < 3\operatorname{tr}(\mathrm{A}^2)$.

2. La matrice A est trigonalisable dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, donc semblable à une matrice triangulaire supérieure T où figurent ses valeurs propres sur la diagonale. Don $\operatorname{tr}\mathrm{A} = \operatorname{tr}\mathrm{T} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Ensuite, A^2 est semblable à T^2 donc $\operatorname{tr}(\mathrm{A}^2) = \operatorname{tr}(\mathrm{T}^2) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$.

3. a) D'après les relations précédentes :

$$\begin{aligned} 3\operatorname{tr}(\mathrm{A}^2) - \operatorname{tr}(\mathrm{A})^2 &= 3(1 + 2r^2\cos(2t)) - (1 + 2r\cos t)^2 \\ &= 2 + 6r^2(2\cos^2 t - 1) - 4r^2\cos^2 t - 4r\cos t \\ &= 2 + 8r^2\cos^2 t - 4r\cos t - 6r^2 \end{aligned}$$

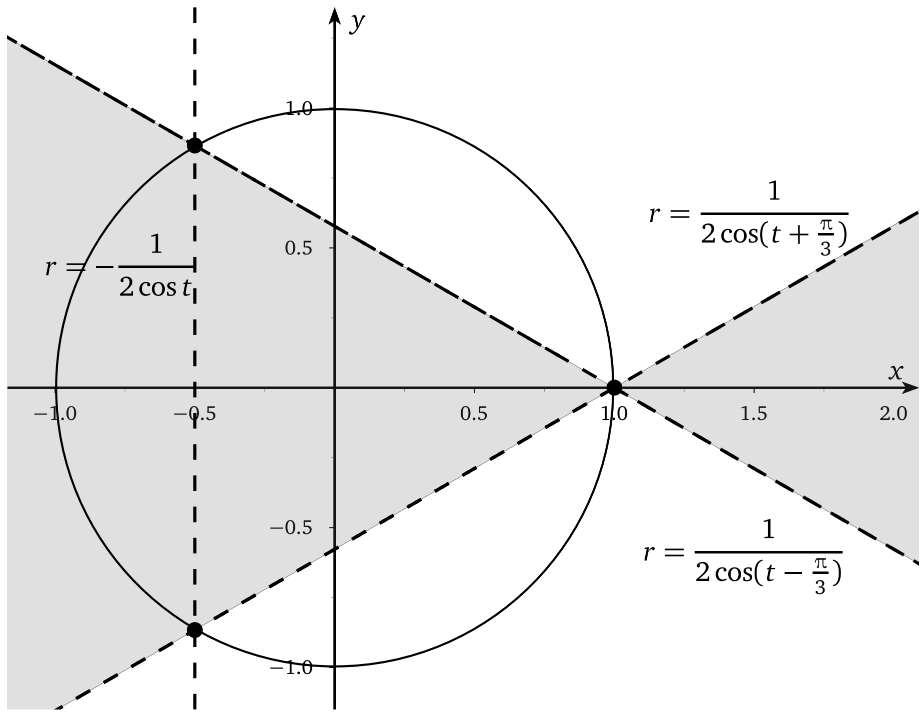
et d'autre part

$$\begin{aligned} 2(1 - 2r\cos(t + \frac{\pi}{3}))(1 - 2r\cos(t - \frac{\pi}{3})) &= 2(1 - r\cos t + r\sqrt{3}\sin t)(1 - r\cos t - r\sqrt{3}\sin t) \\ &= 2[(1 - r\cos t)^2 - 3r^2\sin^2 t] \\ &= 2[1 + r^2\cos^2 t - 2r\cos t - 3r^2 + 3r^2\cos^2 t] \end{aligned}$$

et en comparant les deux expressions, on a bien l'égalité demandée.

b) L'inégalité $3\,\mathrm{tr}(A^2)-\mathrm{tr}(A)^2>0$ se traduit par $(1-2r\cos(t+\frac{\pi}{3}))(1-2r\cos(t-\frac{\pi}{3}))>0$. Il s'agit de la portion du plan délimitée par les droites de représentation paramétrique polaire $r=\dfrac{1}{2\cos(t+\frac{\pi}{3})}$ et $r=\dfrac{1}{2\cos(t-\frac{\pi}{3})}$, représentée en gris sur la figure ci-dessous. D'autre part, l'inégalité $\mathrm{tr}(A)>0$ se traduit par $2r\cos t+1>0$ soit simplement $\mathscr{Re}(\alpha_2)>-\dfrac{1}{2}$. Enfin, la condition $r\leqslant 1$ implique que α_2 se trouve à l'intérieur du cercle unité.

En conclusion, α_2 est à l'intérieur du triangle dont les sommets sont les points d'affixes $1,1$ et j^2 (racines cubiques de 1).



4. Posons $z=re^{it}$. Alors $1+2r\cos t=1+z+\overline{z}$.

On a aussi $-2r\cos(t-\frac{\pi}{3})=2r\cos(t+\frac{2\pi}{3})=2\mathscr{Re}(jz)=jz+j^2\overline{z}$ avec $j=e^{2i\pi/3}$ et $-2r\cos(t+\frac{\pi}{3})=2r\cos(t-\frac{2\pi}{3})=2\mathscr{Re}(j^2z)=j^2z+j\overline{z}$.

La matrice de l'énoncé peut s'écrire $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$, avec $a=\dfrac{1}{3}(1+z+\overline{z})$, $b=\dfrac{1}{3}(1+j^2z+j\overline{z})$ et $c=\dfrac{1}{3}(1+jz+j^2\overline{z})$.

Son polynôme caractéristique est $\chi_A=\begin{vmatrix}a-X&b&c\\c&a-X&b\\b&c&a-X\end{vmatrix}$.

L'opération $C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3$ montre que ce polynôme est divisible par $a+b+c-X$, l'opération $C_1\leftarrow C_1+jC_2+j^2C_3$ montre qu'il est divisible par $a+bj+cj^2-X$ et enfin l'opération $C_1\leftarrow C_1+j^2C_2+jC_3$ montre qu'il est divisible par $a+bj^2+cj-X$.

On a donc $\chi_A=(a+b+c-X)(a+bj+cj^2-X)(a+bj^2+cj-X)$ et les valeurs propres de A sont $a+b+c=1$, $a+bj+cj^2=z$ et $a+bj^2+cj=\overline{z}$ compte tenu des calculs précédents et de la relation $1+j+j^2=0$, c'est-à-dire α_1,α_2 et α_3.

Enfin, l'appartenance de α_2 à l'intérieur (strict) du triangle précédent implique que les coefficient a,b,c sont strictement positifs.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de A sont bien } \alpha_1,\alpha_2 \text{ et } \alpha_3\text{, et A appartient à } \mathscr{P}_3^{>0}}$$

5. Notons $\mathscr{S}_1$ l'ensemble des triplets $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de $\mathscr{S}$ tels que $\alpha_1 = 1$. L'appartenance de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ à $\mathscr{S}$ à S (qui implique forcément $\alpha_1 > 0$) revient à celle de $\left(1, \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)$ à $\mathscr{S}_1$.

Ainsi $\mathscr{S}$ est l'ensemble des triplets (r, ru, rv) où $r > 0$ et (u, v) vérifie l'une des deux conditions :

- u et v sont deux complexes conjugués situés à l'intérieur (strict) du triangle équilatéral de sommets $1, j$ et j^2 (cela correspond aux cas envisagés dans les questions **3** et **4**).
- u et v sont réels : alors ils appartiennent à $]-1, 1[$ et $u + v > -1$.

- FIN -