DM N°4 – MATRICES MAGIQUES(pour le 22/10/2010)

Le but du problème est d'étudier certaines propriétés des matrices magiques.

N.B : La partie **A**, consacrée entièrement à l'informatique, est entièrement indépendante des autres.

NOTATIONS :

Dans tout le problème, $\mathscr{M}_n$ désigne la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées à n lignes et n colonnes, n étant un entier supérieur ou égal à 2.

Si A appartient à $\mathscr{M}_n$, on note a_{ij}, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, l'élément de la i-ème ligne et de la j-ième colonne de A.

I_n désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_n$ et J_n désigne la matrice de $\mathscr{M}_n$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

On considère le sous-ensemble $\mathscr{E}$ de $\mathscr{M}_n$ formé des matrices A telles que les $2n$ nombres réels

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \quad \text{et} \quad \sum_{h=1}^{n} a_{hj} \quad \text{pour} \quad i \in [\![1,n]\!] \text{ et } j \in [\![1,n]\!]$$

soient tous égaux, et on note alors $d(\mathrm{A})$ leur valeur commune.
($\mathscr{E}$ est l'ensemble des matrices pseudo-magiques).

On considère aussi le sous-ensemble $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ des matrices A vérifiant *en outre* :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i} = d(\mathrm{A})$$

($\mathscr{F}$ est l'ensemble des matrices magiques).

PARTIE A : Exemples de matrices magiques d'ordre impair

On propose ici un algorithme permettant d'obtenir une matrice magique d'ordre n impair, et dont les coefficients sont les entiers $1, 2, 3, \ldots, n^2$.

On place l'entier 1 au milieu de la première ligne. On suppose par récurrence que les k premiers entiers ont été placés (pour $1 \leqslant k \leqslant n^2 - 1$), et que l'entier k a été placé en i-ème ligne et j-ème colonne. On place alors l'entier $k+1$ en respectant les règles suivantes :

- on pose $\mathrm{I} = i-1$ (sauf si $i=1$, auquel cas on pose $\mathrm{I}=n$) et $\mathrm{J} = j+1$ (sauf si $j=n$, auquel cas on pose $\mathrm{J}=1$) ;
- si aucun nombre n'a encore été placé à la I-ème ligne et J-ième colonne, on y place $k+1$;
- si l'emplacement précédent est déjà occupé, on pose $\mathrm{I} = i+1$ (sauf si $i=n$ auquel cas on pose $\mathrm{I}=1$) et $\mathrm{J}=j$, et on place $k+1$ en I-ème ligne et J-ième colonne.

1. Pour $n=3$ puis pour $n=5$, construire une matrice magique en utilisant l'algorithme précédent.

2. La constante impaire n étant supposée pré-définie, écrire un programme MAPLE qui construise, en suivant l'algorithme précédent, une matrice magique d'ordre n.

PARTIE B : Étude de $\mathscr{E}$

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$, et que l'application d est une forme linéaire sur $\mathscr{E}$.

2. **a)** Montrer qu'une matrice A de $\mathscr{M}_n$ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si il existe un réel λ tel que $\mathrm{AJ}_n = \mathrm{J}_n\mathrm{A} = \lambda \mathrm{J}_n$. Exprimer alors λ en fonction de $d(\mathrm{A})$.

b) En déduire que $\mathscr{E}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n$, et que l'application d est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres.

c) Si A est une matrice inversible de $\mathscr{E}$, montrer que $d(\mathrm{A})$ est non nul, que A^{-1} appartient à $\mathscr{E}$, et comparer $d(\mathrm{A})$ et $d(\mathrm{A}^{-1})$.
Réciproquement, si A appartient à $\mathscr{E}$ et que $d(\mathrm{A})$ est non nul, la matrice A est-elle nécessairement inversible ?

d) Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$. On pose $\mathrm{C} = \dfrac{d(\mathrm{A})}{n}\mathrm{J}_n$ et $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \mathrm{C}$.
Calculer les produits BC et CB.
Comparer, pour $p \in \mathbb{N}^*$, A^p et $\mathrm{B}^p + \mathrm{C}^p$.

3. **a)** Soit $\mathscr{G}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ constitué par les matrices A telles que $d(\mathrm{A}) = 0$, et $\mathscr{H}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ constitué des matrices de la forme $\lambda \mathrm{J}_n$ où λ décrit $\mathbb{R}$.
Prouver que $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{E}$.

b) Pour r et s éléments de $[\![2,n]\!]$, on note A_{rs} la matrice de $\mathscr{M}_n$ dont tous les éléments sont nuls sauf a_{11}, a_{rs}, a_{1s}, a_{r1} qui sont tels que : $a_{11} = a_{rs} = 1$ et $a_{1s} = a_{r1} = -1$.
Montrer que l'ensemble des matrices A_{rs} pour $(r,s) \in [\![2,n]\!]^2$ est un système libre, puis qu'il constitue une base de $\mathscr{G}$.
En déduire la dimension de $\mathscr{G}$ puis une base et la dimension de $\mathscr{E}$.

c) Dans le cas $n = 2$, donner la forme générale des matrices de $\mathscr{E}$.

PARTIE C : Étude de $\mathscr{F}$ dans le cas général

1. Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.

2. **a)** Soit E un espace vectoriel de dimension p $(p \geqslant 2)$, et H et H′ deux hyperplans distincts de E. Déterminer la dimension de $\mathrm{H} \cap \mathrm{H}'$.

b) Soient l_1 et l_2 les applications définies sur $\mathscr{E}$ par :

$$l_1(\mathrm{A}) = d(\mathrm{A}) - \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{et} \quad l_2(\mathrm{A}) = d(\mathrm{A}) - \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}$$

Montrer que ce sont des formes linéaires sur $\mathscr{E}$.

c) Montrer que, si $n > 2$, ces deux formes linéaires sont indépendantes (on pourra calculer les images par l_1 et l_2 de I_n et de A_{nn}, où A_{nn} est définie comme en B.3.b).

d) Déduire des questions précédentes la dimension de $\mathscr{F}$ (distinguer les cas $n = 2$ et $n > 2$).
Dans le cas $n = 2$, donner la forme générale des matrices de $\mathscr{F}$.

PARTIE D : Étude de $\mathscr{F}$ dans le cas $n = 3$

Dans cette partie, on suppose $n = 3$. On appelle carré magique tout élément de $\mathscr{F}$ dont les coefficients sont des entiers positifs.

1. $\mathscr{E}$ est rapporté à la base $\{\mathrm{A}_{22}, \mathrm{A}_{23}, \mathrm{A}_{32}, \mathrm{A}_{33}, \mathrm{J}_3\}$ trouvée à la question B.3.b.

a) Déterminer dans cette base un système d'équations linéaires caractérisant $\mathscr{F}$.
En déduire que les matrices $\{2\mathrm{A}_{23} - \mathrm{A}_{33}, 2\mathrm{A}_{32} - \mathrm{A}_{33}, \mathrm{J}_3\}$ forment une base de $\mathscr{F}$.

b) En déduire que $\mathscr{F}$ est l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} b+c & a-b+c & -a+c \\ -a-b+c & c & a+b+c \\ a+c & b-a+c & -b+c \end{pmatrix}$$

lorsque a, b, c décrivent $\mathbb{R}$.

2. *Pour les 5/2 uniquement :*
a) Si A est une matrice de $\mathscr{F}$, montrer que $d(\mathrm{A})$ en est une valeur propre. Quel en est un vecteur propre associé ?
b) Montrer que les deux autres valeurs propres de A (dans $\mathbb{C}$) sont opposées.

3. c étant un *entier naturel* fixé, déterminer des conditions nécessaires et suffisantes portant sur a et b pour qu'il existe une matrice A, définie par la formule du D.1.b, dont les coefficients soient aussi des entiers naturels (*on pourra interpréter graphiquement les conditions obtenues en précisant la région du plan à laquelle appartient le point de coordonnées* (a,b)).

4. $d(\mathrm{A})$ étant un entier naturel donné, déterminer en fonction de $d(\mathrm{A})$ le nombre de carrés magiques à coefficients dans $\mathbb{N}$, puis le nombre de carrés magiques à coefficients dans $\mathbb{N}^*$.

5. Déterminer tous les carrés magiques dont les coefficients appartiennent à l'ensemble $\{1,2,\ldots,9\}$, et où chacun de ces nombres ne figure qu'une seule fois.

PARTIE E : Étude d'un système générateur de $\mathscr{E}$

Dans cette partie, n désigne de nouveau un entier naturel quelconque (supérieur ou égal à 2).

On désigne par Σ_n le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$. Pour tout élément σ de Σ_n, et pour tout vecteur $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on pose : $f_\sigma(x)=(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)})$.

1. **a)** Montrer que f_σ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) Vérifier que : $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $f_\sigma(e_j)=e_{\sigma^{-1}(j)}$.

2. Soit alors $\mathscr{B}=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et P_σ la matrice de f_σ dans $\mathscr{B}$ (P_σ s'appelle une *matrice de permutation*).

a) Montrer que P_σ appartient à $\mathscr{E}$, et calculer $d(\mathrm{P}_\sigma)$.

b) Montrer que : $\forall \sigma,\sigma' \in \Sigma_n$, $\mathrm{P}_\sigma\mathrm{P}_{\sigma'}=\mathrm{P}_{\sigma'\sigma}$. En déduire que : $\forall\ \sigma\in\Sigma_n$, $\left(\mathrm{P}_\sigma\right)^{-1}=\mathrm{P}_{\sigma^{-1}}={}^t\,\mathrm{P}_\sigma$.

c) On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des matrices P_σ lorsque σ décrit Σ_n. Quel est le cardinal de $\mathscr{P}$? Quelle est la structure de $\mathscr{P}$ muni de la multiplication des matrices ?

3. Soit $\mathscr{Q}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ engendré par $\mathscr{P}$. Montrer que la matrice J_n et les matrices A_{rs} appartiennent à $\mathscr{Q}$.
Comparer les espaces vectoriels $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{E}$.

4. **a)** Soit $\mathscr{D}=\{\mathrm{A}\in\mathscr{E},\ \text{tq } d(\mathrm{A})=1 \text{ et } \forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ a_{ij}\geqslant 0\}$.
(les matrices de $\mathscr{D}$ sont appelées les matrices stochastiques)

i. Montrer que $\mathscr{P}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{D}$.

ii. Soient A et B deux matrices distinctes de $\mathscr{D}$ et soit P une matrice de $\mathscr{P}$ telles que $\mathrm{P}=\alpha\mathrm{A}+\beta\mathrm{B}$ avec $\alpha\geqslant 0$ et $\beta\geqslant 0$.
Démontrer : $\mathrm{P}=\mathrm{A}$ ou $\mathrm{P}=\mathrm{B}$.

b) Démontrer que, pour toute matrice A de $\mathscr{D}$, il existe m matrices $\mathrm{P}_{\sigma_1},\mathrm{P}_{\sigma_2},\ldots\mathrm{P}_{\sigma_m}$ et m réels non nuls $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ tels que :

$$1\leqslant m\leqslant (n-1)^2+1 \ \text{ et } \ \mathrm{A}=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\mathrm{P}_{\sigma_k}$$

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\lambda_k$.

c) Soit A une matrice appartenant à $\mathscr{D}$.
Montrer que : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2\leqslant 1$.
Dans quel cas l'égalité est-elle réalisée pour un indice i ?
En déduire qu'une matrice A de $\mathscr{D}$ appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si elle est inversible dans $\mathscr{D}$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆