CORRIGÉ DS N^{o}4

Matrices réelles sans valeurs propres réelles d'après Centrale PSI 2005.

Résultats préliminaires.

1.a. Notons R (resp. J) la matrice dont le coefficient générique est la partie réelle (resp. imaginaire) de P. On a alors $P = R + iJ$.

1.b. $AP = PB$ devient, avec les notations de la question précédente,

$$AR + iAJ = RB + iJB$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire de chaque coefficient, on a donc $AR = RB$ et $AJ = JA$. En combinant ces relations, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{C},\ A(R + tJ) = AR + tAJ = RB + tJB = (R + tJ)B$$

1.c. L'application $t \in \mathbb{C}R+tJ$ a des fonctions coordonnées qui sont polynomiales. Avec la formule théorique du déterminant, on en déduit que $\phi : t \mapsto det(R + tJ)$ est aussi polynomiales. Or, $\phi(i) = det(P) \neq 0$ et ϕ n'est pas nulle. Sa restriction à $\mathbb{R}$ n'est donc pas nulle (un polynôme admettant une infinité de racines est nul). On a donc

$$\exists\, t_0 \in \mathbb{R}/\ R + t_0 J \in GL_n(\mathbb{R})$$

1.d. Soit $Q = R = t_0 J$. La question 1.b montre que $AQ = QB$ et, comme Q est inversible,

$$Q^{-1}AQ = B$$

ce qui montre que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n$.

2.a. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. C'est une fonction polynomiales donc continue sur $\mathbb{R}$. La condition sur le degré montre qu'en $+\infty$ et $-\infty$ la fonction admet des limites infinies de signes opposés. Le théorème des valeurs intermédiaires indique alors que P s'annule sur $\mathbb{R}$.
Remarque : alternativement, il existe un nombre impair de racines complexes comptées avec les multiplicités. Comme ces racines sont deux à deux conjuguées, il doit y en avoir une réelle.

2.b. Si n est impair et $A \in \mathcal{M}_n$ son polynôme caractéristique est réel de degré impaire et possède une racine réelle. Il y a donc une valeur propre réelle. En contraposant ceci, on voit que n doit être pair quand (P_A) est vérifiée.

Partie I.

I.A.1. On a $s(e_1) = e_1$ et $s(e_2) = -e_2$ et donc

$$Mat(s_1, (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le cours indique alors que

$$Mat(u \circ s_1, (e_1, e_2)) = M(0, 1)Mat(s_1, (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit s_2 l'endomorphisme tel que $Mat(s_2, (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$. Comme $A^2 = I_2$, s_2 est une symétrie et

$$u = (u \circ s_1) \circ s_1 = s_2 \circ s_1$$

I.A.2. a. On cherche une base (f_1, f_2) telle que $u(f_1) = f_2$ et $u(f_2) = -f_1$. La première condition amène à poser (on prend $f_1 = e_1$ ce qui impose f_2)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P est inversible ($det(P) = 1$) et comme $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a donc

$$P^{-1}AP = M(0,1)$$

b. On peut écrire, avec $I.A$, que $M(0,1) = A_2A_1$ avec A_2 et A_1 matrices de symétrie. On a donc

$$A = S_2S_1 \text{ avec } S_2 = PA_2P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } S_1 = PA_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme $A_2^2 = A_1^2 = I_2$, on a aussi $S_1^2 = S_2^2 = I_2$ et S_1, S_2 sont des matrices de symétrie.

c. La méthode est la même qu'en $2.a$. On note cette fois $Q = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Q est inversible car $\beta \neq 0$ (sinon on aurait $\alpha^2 = -1$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ ce qui est exclus) et $B \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ indique alors que

$$Q^{-1}BQ = M(0,1)$$

d. Avec les notation de la question $2.c$, on a donc

$$B = T_2T_1 \text{ avec } T_2 = PA_2P^{-1} \text{ et } T_1 = PA_1P^{-1}$$

Comme $A_2^2 = A_1^2 = I_2$, on a aussi $T_1^2 = T_2^2 = I_2$ et T_1, T_2 sont des matrices de symétrie.

I.A.3. Il existe un réel θ tel que $\alpha = cos(\theta)$ et $\beta = sin(\theta)$. $M(\alpha, \beta)$ est alors la matrice dans la base (e_1, e_2) (qui est orthonormée directe pour la structure euclidienne canonique) de la rotation d'angle θ. Cette rotation se décompose comme le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des droites formant un angle $\theta/2$ (par exemple $s_2 \circ s_1$ avec s_1 symétrie par rapport à la droite d'angle polaire 0 et s_2 symétrie par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$).

I.A.4. Soit $N = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}M(\alpha, \beta)$. N est du type de la question précédente et s'écrit donc $N = S_2S_1$ avec S_1, S_2 matrices de symétrie. On a donc

$$M = S_2S_1H \text{ avec } H = (\alpha^2 + \beta^2)I_2$$

et H est une matrice d'homothétie.

I.A.5. a. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = X^2 - Tr(A)X + det(A) = X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$$

La condition (P_A) est vérifiée si et seulement si χ_A n'a pas de racines réelles, c'est à dire si son discriminant est < 0. La condition est donc

$$(a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0$$

b. Supposons (par conditions nécessaires) que A soit semblable à $M(\alpha, \beta)$. Trace et déterminant étant des invariants de similitude, on a

$$2\alpha = a + d \text{ et } \alpha^2 + \beta^2 = ad - bc$$

Avec la condition vue en 5.a, on a donc un unique couple envisageable (α, β) de réels tels que $\beta > 0$ et c'est

$$\alpha = \frac{a+d}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{4(ad-bc)-(a+d)^2}$$

Réciproquement, soit α et β comme ci-dessus. $M(\alpha,\beta)$ est une matrice réelle semblable à A. Par ailleurs, $M(\alpha,\beta)$ et A ont même polynôme caractéristique (par choix de α et β). Ce dernier étant scindé à racines simples, elles sont diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et semblables à la même matrice diagonale. Par transitivité, elles sont semblables dans $\mathbb{C}$. La partie préliminaire montre qu'elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_2$.

c. Le déterminant étant un invariant de similitude, on a

$$det(A) = det(M(\alpha,\beta)) = \alpha^2 + \beta^2 > 0$$

d. Avec la question $IA4$ on a l'existence de S_1, S_2 matrice de symétrie et de H matrice d'homothétie telles que $M = S_2S_1H$. En notant P une matrice réelle telle que $P^{-1}AP = M(\alpha,\beta)$ (P existe avec $5b$) on a donc

$$A = T_1T_2H \quad \text{avec} \quad T_i = PS_iT^{-1}$$

et $T_i^2 = 1$.

I.A.6.

$$M(\alpha,\beta) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}M\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}M(\alpha',\beta')$$

Comme $\alpha'^2 + \beta'^2 = 1$, on est dans le cadre de $A3$. $M(\alpha,\beta)$ est la composée d'une rotation et d'une homothétie. Réciproquement, de tels endomorphismes ont une matrice de type $M(\alpha,\beta)$ avec $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$.

I.B.1. Comme $B^2 = I_p$, B est la matrice dans la base canonique d'une symétrie. Notons E_1 et E_2 les sous-espaces associés à B et $\mathcal{C}$ une base adaptée à $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^p$. La matrice de la symétrie est représentée dans $\mathcal{C}$ par $\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}$ où q est la dimension de E_1 et r celle de E_2. Matriciellement, cela signifie qu'en notant Q la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{C}$ on a

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}$$

I.B.2. Par analogie avec IA, on introduit la matrice $P = \begin{pmatrix} I_p & 2I_p \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. On vérifie (calcul par blocs) que P est inversible avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & -2I_p \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. Un nouveau calcul par blocs donne

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

I.B.3. Notons cette fois $R = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ où Q est la matrice de $B.1$. R est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ et un calcul par blocs donne

$$R^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{pmatrix}R = \begin{pmatrix} 0 & -Q^{-1}BQ \\ Q^{-1}BQ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}$$

Par transitivité, A est semblable à la matrice du membre de droite (par le biais de la matrice de passage PR).

I.B.4. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à B. La question précédente donne l'existence d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_{2p})$ telle que

$$Mat(u, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\mathcal{D} = (e_1, e_{p+1}, e_2, e_{p+2}, \dots, e_q, e_{p+q}, e_{p+q+1}, e_{q+1}, e_{p+q+2}, e_{q+2} \dots, e_{2p}, e_{p-1})$$

C'est une base de $\mathbb{R}^{2p}$ (on n'a fait que réordonner les termes de $\mathcal{C}$) telle que

$$Mat(u, \mathcal{D}) = diag(M(0,1), M(0,1), \dots, M(0,1))$$

A est donc semblable à cette dernière matrice.

I.B.5. Ici, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ vérifie $B^2 = 1$. $(-3, 1)$ et $(-1, 1)$ sont vecteurs propres associés à 1 et -1. On a donc $Q = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ PR = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On réordonne les colonnes pour obtenir

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec $IA1$, on a donc

$$M^{-1}AM = diag(S_2S_1, S_2S_1) = diag(S_2, S_2)diag(S_1, S_1) \text{ avec } S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $A = T_2T_1$ avec

$$T_2 = Mdiag(S_2, S_2)M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ T_1 = Mdiag(S_1, S_1)M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -8 & -12 \\ -1 & -2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

T_1 et T_2 sont bien des matrices de projection (carré égal à I_4).

Partie II.

II.A.1. $X^2 + 1$ annule A. Les valeurs propres de A sont racines de $X^2 + 1$ et ne sont pas réelle. (P_A) est vérifiée.

II.A.2. Soit E une matrice d'opération élémentaire.

a. Si cette opération est $L_i \leftrightarrow L_j$ alors on passe de E à I_n faisant l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$. E^{-1} correspond donc à cette opération. Ainsi, EAE^{-1} s'obtient à partir de A en changeant les lignes i et j puis les colonnes i et j.

b. Si cette opération est $L_i \leftarrow \alpha L_i$ alors alors on passe de E à I_n en faisant l'opération $C_i \leftarrow \alpha^{-1} C_i$. E^{-1} correspond donc à cette opération. EAE^{-1} s'obtient à partir de A en multipliant la ligne i par α puis la colonne i par α^{-1}.

c. Si cette opération est $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ alors alors on passe de E à I_n en faisant l'opération $C_j \leftarrow C_j - \lambda C_i$. E^{-1} correspond donc à cette opération. EAE^{-1} s'obtient à partir de A en effectuant successivement $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ puis $C_j \leftarrow C_j - \lambda C_i$.

II.A.3. a. Le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ n'étant pas un vecteur propre (puisqu'il n'y a aucun vecteur propre réel), la première colonne de A n'est pas colinéaire à e_1. Ainsi, il existe $i \geq 2$ tel que $A_{i,1} \neq 0$.

b. Soit $i \geq 2$ un indice tel que $A_{i,1} \neq 0$. Soit E_1 la matrice correspondant à $L_i \leftrightarrow L_2$. La matrice $B = E_1 A E_1^{-1}$ sera telle que $B_{2,1} = A_{i,1} \neq 0$ (on échange les lignes 2 et i ce qui amène le coefficient en place puis on permute C_2 et C_i ce qui ne change pas la colonne 1 et laisse le coefficient en place.

Soit E_2 la matrice de l'opération $L_2 \leftarrow B_{2,1}^{-1} L_2$ et $C = E_2 B E_2^{-1}$. On a alors $C_{2,1} = 1$ (on multiplie la ligne 2 pour obtenir un coefficient 1 puis on change la colonne 2 ce qui laisse le 1 en place).

Soit E_3 la matrice de l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - C_{1,1} L_2$ et $D = E_3 C E_3^{-1}$. On a alors $D_{1,1} = 0$ et $D_{2,1} = 1$ (on opère sur la ligne 1 pour amener un 0 puis sur la colonne 2 ce qui laisse en place le 0 et le 1).

On continue avec des matrices d'opérations élémentaires $E_4, \dots, E_{n+1}$ du type $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_2$ pour obtenir

$$A' = PAP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = E_{n+1} E_n \dots E_1$$

avec $A'_{i,1} = 0$ si $i \neq 2$ et $A'_{2,1} = 0$.

Remarque : bien plus simplement, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a $(e_1, u(e_1))$ qui est libre et peut être complétée en une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, u est représentée par une matrice du type voulu. En passant aux matrices, on obtient la similitude demandée.

c. Soit v l'endomorphisme canoniquement associé à A'. On a $v(e_1) = e_2$. Par ailleurs,

$$A'^2 = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}(-I_n)P = -I_n$$

et donc $v(e_2) = v^2(e_1) = -e_1$. La seconde colonne de A' est donc $(-1, 0, \dots, 0)$.

II.A.4. Soit F la matrice d'une opération élémentaire $C_3 \leftarrow C_3 + \lambda C_2$ et $B = F^{-1} A' F$. A'' est obtenue en effectuant les opérations $C_3 \leftarrow C_3 + \lambda C_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_3$. Étant donnée la forme des deux premières colonnes de A', la matrice A'' aura encore des colonnes comme A'. En choisissant $\lambda = A'_{1,3}$, elle vérifiera en outre $B_{1,3} = 0$.

On itère le processus pour obtenir une matrice B semblable à A' et de la forme suivante

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & ? & \dots & ? \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & ? & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Comme $A^2 = -I_n$ et B semblable à A, on a $B^2 = -I_n$. En regardant la première ligne de B^2, ceci impose que $B_{2,i} = 0$ si $i \geq 3$. On a donc une matrice de la forme voulue semblable à A' et donc à A.

Remarque : avec les notations ci-dessus, on a $A''_{1,i} = A'_{1,i}$ pour $i \geq 4$. Il est ainsi facile de voir quelles opérations on doit effectuer. Si on considère la matrice $R = F_3 \dots F_n$ où F_i est la matrice de l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + A'_{1,i} C_2$, on a

$$R^{-1} A' R = B$$

La matrice Q de l'énoncé est donc égale à $R^{-1} = F_n^{-1} \dots F_3^{-1}$. Notons que F_i^{-1} est la matrice de l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - A'_{1,i}L_i$. A ce niveau, on obtient

$$ZAZ^{-1} = \begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où Z est un produit de matrices correspondant à des opérations élémentaires sur les lignes. On obtient Z en effectuant ces opérations à partir de I_n.

II.A.5. Un calcul par blocs donne

$$\begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}$$

Or, on sait que cette matrice vaut $-I_n$. On a donc $B^2 = -I_{n-2}$. On est amenés à faire une récurrence sur p (avec $n = 2p$).

- Si $p = 1$ alors $n = 2$ alors on a déjà le résultat voulu avec $A.4$ (B est un bloc de taille nulle).
- Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $p - 1 \geq 1$. Avec $A3$ et $A4$ on trouve N et B telles que

$$NAN^{-1} = \begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad B^2 = -I_{n-2}$$

L'hypothèse de récurrence donne P telle que PBP^{-1} est bloc-diagonale avec des blocs de $M(0,1)$. On pose $Q = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$. C'est une matrice inversible d'inverse $\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ et on a

$$QNAN^{-1}Q^{-1} = \begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & PBP^{-1} \end{pmatrix} = diag(M(0,1), \dots, M(0,1))$$

ce qui clôt la récurrence.

II.A.6. Avec la question $3.b$, on effectue successivement les opérations

$$L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-2},\ L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2,\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2,\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2$$

et on obtient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -5/2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec la question 4, on effectue alors l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_4$ et on obtient

$$Z^{-1}AZ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le travail avec le bloc de taille 2 inférieur gauche donne les opérations

$$L_4 \leftarrow -2L4, L_3 \leftarrow L_3 - L4$$

On obtient finalement

$$MAM^{-1} = diag(M(0,1), M(0,1)) \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

II.B.1. $(X-\alpha)^2+\beta^2$ est un polynôme qui annule A et qui n'a pas de racines réelles (car $\beta>0$). A n'a donc pas de valeur propre réelle et (P_A) est vérifiée.

II.B.2. La matrice $C=\frac{1}{\beta}(A-\alpha I)$ vérifie $C^2=-I_n$. On peut trouver M telle MCM^{-1} est bloc-diagonale avec des blocs égaux à $M(0,1)$. On en déduit alors que

$$MAM^{-1}-\alpha I_n = M(\beta C)M^{-1} = \beta MCM^{-1} = diag(M(0,\beta),\dots,M(0,\beta))$$

et donc

$$MAM^{-1} = \alpha I_n + diag(M(0,\beta),\dots,M(0,\beta)) = diag(M(\alpha,\beta),\dots,M(\alpha,\beta))$$

et on a la similitude voulue. Le déterminant est un invariant de similitude et on sait calculerles déterminants bloc-diagonaux. On obtient

$$det(A) = det(M(\alpha,\beta))^p = (\alpha^2+\beta^2)^p > 0$$

II.C.1. $\forall i,\ u(X^i)=(-1)^iX^{n-1-i}$. Le plan $Vect(X^i,X^j)$ est stable par u ssi

$$n-1-i, n-1-j \in \{i,j\}$$

n étant pair, on ne peut avoir $n-1-i=i$ ou $n-1-j=j$. La condition cherchée est ainsi

$$i+j=n-1$$

II.C.2. Avec le calcul ci-dessus, on a

$$u\circ u(X^i) = u((-1)^iX^{n-1-i}) = (-1)^i(-1)^{n-1-i}X^{n-1-(n-1-i)} = -X^i$$

et donc $u^2=-Id$. La partie $II.A$ indique que la matrice de u dans n'importe quelle base est semblable à $diag(M(0,1),\dots,M(0,1))$. Or, dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, cette matrice est la matrice A proposée (tous les coefficients sont nuls sauf ceux sur l'antidiagonale où alternent des -1 et des 1). On a ainsi le résultat demandé.

Partie III.

III.A.1. Pour tout réel x, $(x-\alpha)^2+\beta^2 \geq \beta^2 > 0$. Le polynôme n'admet pas de racines réelles. Il admet donc deux racines complexes non réelles et conjuguées (n'étant pas réelles, elles sont distinctes).

III.A.2. Si (1) a lieu alors le polynôme caractéristique de A (invariant de similitude) est

$$\prod_{k=1}^{p}\left((X-\alpha_k)^2+\beta_k^2\right)$$

Par théorème de Cayley-Hamilton, il annule A et la question précédente montre qu'il n'admet pas de racines réelles. Il faut cependant raffiner car les racines ne sont pas forcément simples (par exemple, deux couple (α_k,β_k) peuvent être égaux).

Notons $P_k=(X-\alpha_k)^2+\beta_k^2$. Deux polynômes P_k sont soit égaux soit sans racine commune (sinon les deux racines, qui sont conjuguées, sont communes et comme les polynômes sont unitaires de degré 2 ils sont égaux). Soit P le produit des P_k deux à deux distincts. On a (produit par blocs)

$$P\left(diag(M(\alpha_1,\beta_1),\dots,M(\alpha_p,\beta_p))\right) = diag(P(M(\alpha_1,\beta_1)),\dots,P(M(\alpha_p,\beta_p)))$$

P étant multiple de chaque P_k, la matrice ci-dessus est nul. P est donc annulateur de A (puisqu'il annule une matrice semblable à A) et il ne possède que des racines complexes non réelles et simples.

III.B.1. Les images de f_1 et f_2 par u (endomorphisme canoniquement associé à A) sont des combinaisons linéaires de f_1 et f_2. Or, la matrice de u dans la base des f_i contient en colonne les images des f_i dans la base des f_i. Les deux premières colonnes de cette matrices sont donc du type $(?, ?, 0, \dots, 0)$ et on a le résultat demandé.

III.B.2. Un produit par blocs montre que

$$\chi_A = \chi_{A'}\chi_B$$

où χ_M désigne le polynôme caractéristique de M. Toute valeur propre de A' est donc valeur propre de A. Or, A ne possède pas de valeur propre réelle et il en est donc de même pour A'. La question $IA5b$ donne alors A' semblable à une matrice du type $M(\alpha, \beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

III.B.3. A' est la matrice dans (f_1, f_2) de la restriction de u (endomorphisme canoniquement associé à A) au sous-espace stable E. Or, $P = \chi_{A'} = \chi_{M(\alpha,\beta)} = (X - \alpha)^2 + \beta^2$ annule A' et on a donc

$$Ker(P(A')) = E$$

Or, $P(A')$ est la restriction à E de $P(A)$ et donc son noyau est inclus dans celui de $Ker(P(A))$ (on a même $Ker(P(A')) = Ker(P(A)) \cap E$). Ainsi,

$$E \subset Ker(P(A)) = Ker((A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$$

III.B.4. Avec le polynôme annulateur à racines simples dans $\mathbb{C}$ on peut conclure à l'aide di théorème des noyau (ce polynôme s'écrit $((X - \alpha)^2 + \beta^2)Q$ les deux facteurs étant premiers entre eux) mais ce théorème n'est plus au programme (pas plus que la notion de polynômes premiers entre eux). Je ne vois pas comment conclure simplement.

III.B.5. Raisonnons en termes d'endomorphismes. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Soit v sa restriction au sous-espace stable $Ker((A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$ et $w = \frac{v-\alpha Id}{\beta}$. On a alors $w^2 = -Id$. f_1 n'est pas vecteur propre pour w et $(f_1, w(f_1))$ est libre. C'est aussi une famille de E (stable par u et donc par v et w). Par cardinal, c'est une base de E. Posons donc $f_2 = w(f_1)$ (c'est possible). On peut compléter (f_1, f_2) de façon à obtenir une base $(f_1, \dots, f_r)$ de $Ker((A-\alpha I_n)^2+\beta^2 I_n)$. Dans cette base, la matrice de w est du type $M = \begin{pmatrix} M(0,1) & ? \\ 0 & C \end{pmatrix}$.
En notant E_i la matrice de l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + M_{1,i}C_2$ et $P = E_3 \dots E_r$ on a $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}$. La matrice P vaut $I_r + \sum_{k=3}^{r} M_{1,k}E_{2,k}$. Elle correspond à une matrice de passage de (f_i) dans une base du type $(f_1, f_2, g_3, \dots, g_r)$. $Vect(g_3, \dots, g_r)$ est alors un suplémentaire de E dans $Ker((A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$ qui est stable par w (d'après la forme de la matrice) et donc aussi par v et donc aussi par u.
Finalement, en notant H un supplémentaire stable par A de $Ker((A-\alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, $Vect(g_3, \dots, g_r) \oplus H$ est un supplémentaire de E stable par A.

III.C. On procède par récurrence sur p ($n = 2p$) que si A vérifie *iii* et est telle que P_A est vraie alors on peut trouver une base "adaptée" (dans laquelle l'endomorphisme est représentée par une matrice du type voulu).

- Si $p = 1$ alors $n = 2$ et on conclut par $IA5$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $p - 1 \geq 1$.
  Commençons par remarquer qu'il existe un plan stable par A.
  En effet, il existe une valeur propre complexe $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$. Soit x un vecteur propre complexe associé. Comme A est réelle, $\overline{\lambda}$ est valeur propre et $\overline{x}$ est vecteur propre associée. Soit $x_1 + ix_2$ la décomposition de x à l'aide de vecteurs réels. On a

$$Ax_1 + iAx_2 = Ax = \lambda x = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + i(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1)$$

  En identifiant les parties réelle et imaginaire, on obtient que $Ax_1, Ax_2 \in Vect(x_1, x_2)$. $Vect(x_1, x_2)$ est stable, de dimension ≥ 1 ($x \neq 0$). Or, A ne possède pas de droite réelle *stable (avec (P_A)) et notre espace est donc de dimension* 2.

Soit P un tel plan stable. Avec (iii) on a un supplémentaire stable F. A induit sur F un endomorphisme B et (P_B) est vérifiée (les valeurs propres d'une restriction étant valeurs propres de l'endomorphisme de départ). Montrons que B vérifie (iii). Soit Q un plan de F stable par B. Il est donc stable par A et il existe un supplémentaire H stable par A. On a $Q \oplus H = E$ et on montre que

$$Q \oplus (H \cap F) = F$$

En effet, la somme est clairement directe cat celle entre Q et H l'est. La somme est incluse dans F car Q et $H \cap F$ le sont. Enfin, si $x \in F$ on peut trouver $y \in Q$ et $z \in H$ tels que $x = y + z$. On a alors $z = x - y \in F$ et donc $z \in H \cap F$. Ainsi, $F \subset Q \oplus (F \cap H)$.

Comme H et F sont stables par A, il en est de même de $H \cap F$ et comme $H \cap F \subset F$, on peut dire que c'est un sous-espace stable par B et il est supplémentaire de Q. B vérifie bien (iii).

Par hypothèse de récurrence, on peut appliquer le résultat à B et trouver une base de F adaptée. De même, on peut trouver une base de P adaptée (avec l'initialisation et comme la restriction de A à P vérifie l'hypothèse sur les valeurs propres). La concaténée des bases de F et P donne une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée.

III.D. On choisit f_1 dans $Ker(A^2 + I)$ et $f_2 = Af_1$ puis $f_3 \in Ker(A^2 - 4A + 5I)$ et (puisque $X^2 - 4x + 5 = (X-2)^2 + 1)$ $f_4 = (A - 2I)f_3$. On obtient alors

$$P^{-1}AP = diag(M(0,1), M(2,1)) \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
