DM N°7 – COMMUTANT D'UN ENDOMORPHISME(pour le 10/12/2010)

Préliminaires (définitions et rappels)

• Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On note n sa dimension et on suppose $n \geqslant 2$. On note $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ son algèbre d'endomorphismes.

• Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Si $\mathscr{B}$ est une base de E, on note $\mathrm{Mat}(u, \mathscr{B})$ la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.

• Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Pour tout entier naturel p non nul, on note $u^p = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{p \text{ fois}}$. On pose $u^0 = \mathrm{Id}$.

• Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on notera $\mathrm{P}(u)$ l'application linéaire définie par :

$$\mathrm{P}(u) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant q} a_k u^k \text{ si } \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant q} a_k \mathrm{X}^k$$

• Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on appelle *commutant* de u l'ensemble $\mathrm{C}(u)$ des endomorphismes qui commutent avec u : on a :

$$\mathrm{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid u \circ v = v \circ u\}$$

On rappelle que $\mathrm{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

• On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est *nilpotent* si et seulement si il existe un entier naturel non nul p tel que $u^p = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier p vérifiant $u^p = 0$ est appelé *indice de nilpotence* de u.

• On note $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans le corps des complexes $\mathbb{C}$.

PARTIE 0 : Un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice M de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : M est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les n entiers consécutifs $1, \ldots, n$. Ainsi, on a :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

On note $\mathrm{C}(\mathrm{M})$ le sous-espace vectoriel formé par les matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec M.

1. Démontrer que $\mathrm{C}(\mathrm{M})$ est l'ensemble des matrices diagonales.

2. En déduire la dimension de $\mathrm{C}(\mathrm{M})$.

Dans toute la suite, u désigne un endomorphisme de E.

PARTIE 1 : Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de u, on note $\mathrm{E}_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé : $\mathrm{E}_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$.
Dans cette partie, on suppose l'endomorphisme u diagonalisable.
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ ses valeurs propres. On a donc : $\mathrm{E} = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$.

On pose $n_i = \dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E. On rappelle que la base $\mathscr{B}$ est dite *adaptée* à la somme directe $\mathrm{E} = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ s'il existe pour chaque entier i compris entre 1 et p, une base $(e_1^i, \ldots, e_{n_i}^i)$ du sous-espace vectoriel $\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ telle que $\mathscr{B} = (e_1^1, \ldots, e_{n_1}^1, e_1^2, \ldots, e_{n_2}^2, \ldots, e_1^p, \ldots, e_{n_p}^p)$.

1. Montrer que si $v \in \mathrm{C}(u)$ alors les sous-espaces $\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v.

2. Pour tout entier i compris entre 1 et p, on note u_i l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$ induit par u. Que peut-on dire de u_i ?

3. En déduire que $v \in C(u)$ si et seulement si, dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}(u)$:

$$\operatorname{Mat}(v, \mathscr{B}) = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & V_p \end{bmatrix} \text{ avec } V_i \in \mathbb{M}_{n_i}(\mathbb{C}) \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant p.$$

4. Montrer que $\dim C(u) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} n_i^2$.

5. Montrer que si u est diagonalisable, alors $\dim C(u) \geqslant n$.

6. Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable tel que $\dim C(u) = n$.

PARTIE 2 : Commutant d'un endomorphisme nilpotent d'indice 2

On suppose dans cette partie que u est nilpotent d'indice 2 et que $n \geqslant 2$. On note r le rang de u. On pose $s = n - 2r$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. En déduire que $r \leqslant \dfrac{n}{2}$.

2. Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E muni de la base $(e'_1, \ldots, e'_r)$, montrer que la famille $\big(u(e'_1), \ldots, u(e'_r)\big)$ est une base de $\operatorname{Im} u$.

3. En utilisant un sous-espace vectoriel H de E tel que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u \oplus H$, montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E telle que :

$$\operatorname{Mat}(u, \mathscr{B}') = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow s \\ \updownarrow r \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \overset{\longleftrightarrow}{r} & \overset{\longleftrightarrow}{s} & \overset{\longleftrightarrow}{r} \end{array} \end{array}$$

I_r désigne la matrice identité d'ordre r.

4. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$; la matrice de u dans la base $\mathscr{B}'$ est définie en blocs en posant :

$$\operatorname{Mat}(v, \mathscr{B}') = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow s \\ \updownarrow r \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \overset{\longleftrightarrow}{r} & \overset{\longleftrightarrow}{s} & \overset{\longleftrightarrow}{r} \end{array} \end{array}$$

Montrer que $v \in C(u)$ si et seulement si $\begin{cases} A_4 = 0_{s,r} \\ A_7 = 0_{r,r} \\ A_8 = 0_{r,s} \\ A_9 = A_1 \end{cases}$ $0_{p,q}$ désignant la matrice nulle à p lignes et q colonnes.

5. En déduire la dimension de $C(u)$ en fonction de n et de r. Montrer que : $\dim C(u) \geqslant \dfrac{n^2}{2}$.

PARTIE 3 : Commutant d'un endomorphisme vérifiant la relation (1) :

$$(u - \mathrm{Id}) \circ (u - 2\mathrm{Id})^2 = 0 \quad (1)$$

Id désigne l'application identique de E. On rappelle que : $(u - 2\mathrm{Id})^2) = (u - 2\mathrm{Id}) \circ (u - 2\mathrm{Id})$.

On pose $E_1 = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $E_2 = \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2$, $n_1 = \dim E_1$, et $n_2 = \dim E_2$, on suppose de plus $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$.

1. Montrer en rappelant le théorème utilisé que : $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$.

On note p_1 le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et p_2 le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1.

2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ la fraction rationnelle : $\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)^2}$.

En déduire deux polynômes U et V tels que : $1 = \mathrm{U}(\mathrm{X})(\mathrm{X}-1) + \mathrm{V}(\mathrm{X})(\mathrm{X}-2)^2$, $\deg \mathrm{U} < 2$ et $\deg \mathrm{V} < 1$.

3. Montrer que $p_1 = \mathrm{V}(u) \circ (u - 2\mathrm{Id})^2$ et $p_2 = \mathrm{U}(u) \circ (u - \mathrm{Id})$.

4. On note $d = p_1 + 2p_2$; montrer que d est diagonalisable.

5. Soit $w = u - d$. Calculer w^2, en déduire que $w = 0$ ou w est nilpotent d'indice 2.

6. Détermination de $\mathrm{C}(u)$

a) Montrer que $v \in \mathrm{C}(u)$ si et seulement si $v \in \mathrm{C}(d)$ et $v \in \mathrm{C}(w)$.

b) Déterminer les restrictions de w à E_1 et E_2 respectivement. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}(w, \mathscr{B}) = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{N} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{n_1} & \overset{\longleftrightarrow}{n_2} \end{array} & \end{array}$$

où N est la matrice de l'endomorphisme induit par $(u - 2\mathrm{Id})$ sur E_2 dans une base de E_2.

c) Montrer que le rang de la matrice N est égal à $n_2 - \dim \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$.

d) Montrer que $v \in \mathrm{C}(u)$ si et seulement si

$$\mathrm{Mat}(v, \mathscr{B}) = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} \mathrm{V}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{V}_2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{n_1} & \overset{\longleftrightarrow}{n_2} \end{array} & \end{array}$$

avec $\mathrm{V}_2\mathrm{N} = \mathrm{N}\mathrm{V}_2$.

e) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{N} = 0$.

f) On suppose u non diagonalisable, déterminer $\dim \mathrm{C}(u)$ en fonction de n_1, n_2 et $\dim \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆