CORRIGÉ DU DS°3 (MINES MP et PSI, 2001)

Première Partie

I.1 Premières propriétés.

a) Si x est un vecteur co-propre associé à μ et μ', on a $u(x) = \mu x = \mu' x$ donc $(\mu - \mu')x = 0$ et donc $\mu = \mu'$ car $x \neq 0$.

b) Comme $u(x) = \mu x$, alors $u(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} x) = \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}} u(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} u(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} x$;
ainsi $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} x$ est un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mu$.

c)
- E_μ est évidemment non vide : il contient le vecteur nul.
- E_μ est stable pour l'addition, car, si x et x' appartiennent à E_μ, $u(x+x') = u(x)+u(x') = \mu x + \mu x' = \mu(x+x')$, donc $x + x' \in E_\mu$.
- Cependant, comme $u(ax) = \mu \overline{a} x$, E_μ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel , (sauf si $\mu = 0$, cas du noyau), mais un $\mathbb{R}$-espace vectoriel car alors $\overline{a} = a$ quand a est réel.

d) La composée de deux applications semi-linéaires est linéaires ; on a en effet, immédiatement

$$u \circ v(ax + by) = u(\overline{a}v(x) + \overline{b}v(y)) = \overline{\overline{a}}(u \circ v)(x) + \overline{\overline{b}}(u \circ v)(y) = a(u \circ v)(x) + b(u \circ v)(y)$$

I.2

a) On s'inspire fortement du cours sur les applications linéaires : $y = u(x) = u\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} u(e_j)$; d'autre part, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, donc on a $y = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_j}\right) e_i$, soit $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_j}$.

Ainsi, $\boxed{Y = A\overline{X}.}$

b) S étant la matrice de passage de la base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ à la base $\mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_n)$, si on note X le vecteur colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ et X′ le vecteur colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}'$, on a, d'après le cours : $X = SX'$.

Avec des notations évidentes : la relation $y = u(x)$ s'écrit $Y = A\overline{X}$ soit $SY' = A\overline{SX'} = A.\overline{S}.\overline{X'}$ et, puisque on a aussi $Y' = BX'$, on en tire $\boxed{B = S^{-1}A\overline{S}}$.

I.3 Exemples :

a) Matriciellement le problème posé s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} -\overline{b} = \mu a \\ \overline{a} = \mu b \end{cases}$; la première équation équivaut par conjugaison à $b = -\overline{\mu a}$ qui en reportant dans la seconde donne $\overline{a} = -\left|\mu\right|^2 a$; or $a \neq 0$, sinon on aurait aussi $b = 0$ donc $X = 0$ ce qui est exclu.

Ainsi, $\left|\mu\right|^2 = -1$, ce qui est impossible. Il n'y a pas de solution : une matrice réelle n'a donc pas nécessairement de valeur co-propre...

b) Si A est réelle et admet une valeur propre réelle λ, elle possède donc un vecteur propre réel associé à λ, noté X $(X \neq 0)$. Si $AX = \lambda X$ alors $A\overline{X} = AX = \lambda X$: X est ainsi un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre λ.

I.4

a) L'hypothèse s'écrit $A\overline{X} = \mu X$ soit par conjugaison $\overline{A}X = \overline{\mu}\overline{X}$ et donc $A\overline{A}X = \overline{\mu}A\overline{X} = \overline{\mu}\mu X = \left|\mu\right|^2 X$ cqfd.

b) • **cas (i) :** Si les vecteurs $A.\overline{X}$ et X sont liés, puisque $X \neq 0$, il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $A\overline{X} = kX$, ce qui implique que k est une valeur co-propre de A. Alors, comme ci-dessus, $A\overline{A}X = |k|^2 X$, donc $\lambda X = |k|^2 X$ et $\lambda = |k|^2$ puisque $X \neq 0$.

Il existe donc θ tel que $k = \sqrt{\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Comme k est une valeur co-propre de A, il résulte de I.1.b qu'il en est de même de $\sqrt{\lambda}$.

• **cas (ii) :** on considère le vecteur $Y = aA\overline{X} + bX$ qui n'est nul que si $(a, b) = (0, 0)$; on a $\overline{Y} = \overline{a}\overline{A}X + \overline{b}\overline{X}$ et ainsi $A\overline{Y} = \overline{a}A\overline{A}X + \overline{b}A\overline{X} = \overline{a}\lambda X + \overline{b}A\overline{X}$;
Donc $A\overline{Y} = \sqrt{\lambda}Y$ si et seulement si $\overline{b} = \sqrt{\lambda}a$ et $\overline{a}\lambda = \sqrt{\lambda}b$. Par exemple $Y = A\overline{X} + \sqrt{\lambda}X$ convient.

c) La condition est nécessaire d'après (a), et suffisante d'après (b) (μ étant un réel positif, $\sqrt{\mu^2} = \mu$...).

d) D'après la question précédente, il suffit d'étudier les valeurs propres réelles positives de la matrice $A_m.\overline{A_m} = A_m^2 = \begin{pmatrix} m^2-1 & -m \\ m & -1 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $X^2 - (m^2-2)X + 1$, de discriminant $\Delta = m^2(m^2-4)$.

Les deux racines lorsqu'elles existent dans $\mathbb{R}$ sont de produit 1 et donc de mêmes signes, ce signe étant aussi celui de leur somme $S = m^2 - 2$.

Ainsi il y a des racines réelles (qui sont aussi les valeurs propres) si et seulement si $m = 0$ (-1 est alors valeur propre double) ou $m^2 \geqslant 4$, et dans ce dernier cas, elles sont positives puisque $S = m^2 - 2 \geqslant 2$.

La condition $|\mathbf{m}| \geqslant \mathbf{2}$ est donc nécessaire et suffisante pour que la matrice A_m admette des valeurs co-propres réelles positives, qui sont alors $\mu = \sqrt{\dfrac{m^2-2+m\sqrt{m^2-4}}{2}}$ et $\dfrac{1}{\mu}$ (dans le cas $m = \pm 2$, il y a une valeur propre double 1 et donc une valeur co-propre réelle de A_m égale à 1).

Remarquons que le cas $m = 0$ correspond à l'exemple du 3.a pour lequel la matrice A n'a pas de valeur co-propre.

I.5 Cas d'une matrice triangulaire supérieure :

a) D'après la question I.1.b il suffit de montrer que $|\lambda|$ est valeur co-propre de A, car $\lambda e^{i\theta} = |\lambda| e^{i(\theta+\varphi)}$ *(φ étant un argument de λ).*

Mais, d'après I.4.c il suffit de prouver que $|\lambda|^2$ est valeur propre de $A\overline{A}$. Ce qui est clair car les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux et les coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires supérieures sont les produits des coefficients diagonaux de chacune de ces matrices.

b) Si μ est une valeur co-propre de A, il en est de même de $\left|\mu\right|$ d'après I.1.b, donc $\left|\mu\right|^2$ est une valeur propre de $A\overline{A}$ d'après I.4. Comme les valeurs propres de $A\overline{A}$ sont (elle est triangulaire) les $|a_{jj}|^2$, on a $|\mu|^2 = |a_{jj}|^2$ pour un certain j ; ayant deux nombres complexes de mêmes modules, ils diffèrent seulement par leurs arguments (modulo 2π) (éventuellement arbitraires si les nombres sont nuls) et on a $a_{jj} = \mu e^{i\theta}$. Donc $\mu e^{i\theta}$ figure sur la diagonale de A, c'en est une valeur propre.

En résumé : Soit A *triangulaire. Si λ est valeur propre de* A *alors $\lambda e^{i\theta}$ est valeur co-propre de* A *pour tout réel* θ.

Réciproquement, si μ est valeur co-propre de A*, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de* A.

c) Ici $\lambda_1 = \lambda_2 = i$; D'après I-5.a 1 est valeur co-propre de A.

On doit alors résoudre $A\overline{X} = X$ ce qui donne, avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-ib \\ c-id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$$

soit $\begin{pmatrix} ia+b+c-id \\ ic+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$, ce qui donne le système $\begin{cases} ia+b+c-id = a+ib \\ c+id = ic+d \end{cases}$;

En identifiant partie réelle et partie imaginaire de la seconde ligne $d = c$ et en reportant dans la première $ia+b+c-ic = a+ib$ donc $i(a-c-b)+b+c-a = 0$ donc $a = b+c$.

Le vecteur $X = \begin{pmatrix} b+c+ib \\ c+ic \end{pmatrix}$ est co-propre pour A avec la valeur co-propre 1.

I.6 Une caractérisation des valeurs co-propres :

Soit $\mu = a+ib$ valeur co-propre pour A (avec a, b réels) et soit $X = Y + iZ$ un vecteur co-propre associé (avec Y, Z vecteurs réels) : cela s'écrit analytiquement $(B+iC)(Y-iZ) = (a+ib)(Y+iZ)$ soit $BY+CZ+i(CY-BZ) = aY-bZ+i(bY+aZ)$

Mais d'après I-1.b $|\mu| = \mu e^{-i\theta}$ (θ étant l'argument (arbitrairement choisi si $\mu = 0$) de μ) est encore une valeur co-propre, on peut donc appliquer les identités précédentes avec $a = |\mu|$ et $b = 0$; ce qui donne $\begin{cases} BY+CZ = |\mu| D \\ CY-BZ = |\mu| Z \end{cases}$

et ainsi $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de D pour la valeur propre $\left|\mu\right|$ (il est bien non nul).

La réciproque est immédiate car si l'on a le système précédent, alors $(B+iC)(Y-iZ) = |\mu|(Y+iZ)$ et $|\mu|$ est co-propre pour A, donc μ aussi.

Seconde Partie

II.1 La relation est en effet réflexive, symétrique et transitive :

- Réflexivité : prendre $S = I$
- Symétrie : changer S en S^{-1}
- Transitivité : Si $B = SA(\overline{S})^{-1}$ et $C = TB(\overline{T})^{-1}$, alors $C = TSA(\overline{S})^{-1}(\overline{T})^{-1} = TSA(\overline{TS})^{-1}$...

Rem : on pouvait aussi dire, plus simplement, sue deux matrices sont vérifient la relation si et seulement si elles représentent la même application semi-linéaire dans deux bases différentes...

II.2 D'après I-4, ces vecteurs sont des vecteurs propres de la matrice $A\overline{A}$ pour les valeurs propres $|\mu_i|^2$, donc linéairement indépendants, puisque vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes (th. du cours).

Avec l'hypothèse faite,et d'après I.4, il existe alors une base de E formée de vecteurs co-propres de A associés aux valeurs co-propres distinctes $\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n}$ (puisque une famille de n vecteurs indépendants dans un espace de dimension n en est une base). A est donc co-semblable à $\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})$.

II.3 **a)** Si $A = S\overline{S}^{-1}$ alors $A\overline{A} = S.\overline{S}^{-1}.\overline{S}.\overline{(\overline{S})^{-1}} = I_n$.

b) • Le spectre de A est fini (au plus n éléments), tandis que l'ensemble des nombres complexes de module 1 ne l'est pas. Il est donc possible de trouver $t \in \mathbb{C}$ tel que $|t| = 1$ et $A + \overline{t}I_n \in GL_n(\mathbb{C})$.
Soit $e^{i\theta}$ une racine carrée de t. Alors $|det(S(\theta))| = |\det(A + \overline{t}I_n)| \neq 0$ et $S(\theta)$ est inversible.

• Un calcul immédiat donne alors $A\overline{S(\theta)} = S(\theta)$, en utilisant la relation $A\overline{A} = I_n$.
S étant inversible, $\overline{S}$ l'est aussi et la relation $A\overline{S} = S$ s'écrit $A = S(\theta)(\overline{S(\theta)})^{-1}$.

En résumé : $A\overline{A} = I_n$ *si et seulement si il existe* $S \in GL_n(\mathbb{C})$ *telle que* $A = S\overline{S}^{-1}$ *c'est-à-dire* A *co-semblable à* I_n.

II.4 **Condition nécessaire pour que A soit co-diagonalisable :**
Posant $D = S^{-1}A\overline{S} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, il est immédiat que $D\overline{D} = S^{-1}A\overline{A}S$; comme $D\overline{D} = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2,\dots,|\lambda_n|^2)$, $A\overline{A}$ est bien diagonalisable, de valeurs propres les $|\lambda_i|^2$, réels positifs ou nuls.
Le rang de A est égale à celui de D, puisque S est inversible ; il est donc égal au nombre des λ_i non nuls, donc au rang de $D\overline{D} = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2,\dots,|\lambda_n|^2)$, donc au rang de $A\overline{A}$ (ces deux dernières matrices étant semblables).

II.5 **II-5 une condition suffisante.**

a) • $B\overline{B} = (S^{-1}A\overline{S}).(\overline{S}^{-1}\overline{A}S) = S^{-1}A\overline{A}S = S^{-1}S\Lambda S^{-1}S = \Lambda$.
Donc $\overline{B}B = \overline{B\overline{B}} = \overline{\Lambda} = \Lambda = B\overline{B}$ car Λ est réelle.

• En multipliant $B\overline{B} = \Lambda$ à droite par B, on a $B\overline{B}B = \Lambda B$; de même en multipliant $\overline{B}B = \Lambda$ à gauche par B on a $B\overline{B}B = B\Lambda$;
Par conséquent, $B\Lambda = \Lambda B$: B et Λ commutent.

b) Comme la matrice B commute avec la matrice Λ, les sous-espaces propres de Λ sont stables par B. Donc la matrice B s'écrit par blocs sous la forme proposée.

c) Notons d'abord que, compte tenu de l'énoncé, on a $\lambda_i > 0$ si $1 \leqslant i \leqslant k-1$, et $\lambda_k \geqslant 0$.
La relation $B\overline{B} = \Lambda$ donne, après un calcul par blocs : $B_i\overline{B_i} = \lambda_i I_{n_i}$

On applique alors à chaque bloc la question II-3.b, en remarquant que si $\lambda_i > 0$, $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}B_i\right)\left(\overline{\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}B_i}\right) = I_{n_i}$;

donc il existe une matrice inversible S_i carrée d'ordre n_i telle que $B_i = \sqrt{\lambda_i}S_i\overline{S_i^{-1}} = S_i(\sqrt{\lambda_i}I_{n_i})\overline{S_i^{-1}}$.
Si $\lambda_k = 0$ on prend S_k inversible quelconque. Si nous montrons que B_k est nulle nous aurons alors $B_k = S_k 0 \overline{S_k^{-1}}$. Pour cela on utilise l'hypothèse sur le rang. B et A ont même rang, noté r, qui est aussi celui de $A\overline{A}$ ou celui de Λ. On a $r = \mathrm{rg}(\Lambda) = n - n_k$. Puisque chaque B_i, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, est inversible, elle est de rang n_i. La structure diagonale par bloc de B donne alors $r = \mathrm{rg}(B) = \sum_i \mathrm{rg}(B_i) = n - n_k + \mathrm{rg}(B_k)$. Par conséquent $\mathrm{rg}(B_k) = 0$ et $B_k = 0$
La matrice P d'ordre n diagonale par blocs et formée des blocs $S_1,\dots,S_k$ est inversible (chacun des blocs diagonaux l'est) et répond à la question posée, avec Δ la matrice obtenue en remplaçant dans Λ les λ_i par $\sqrt{\lambda_i}$.
A est donc co-semblable à Δ, elle est bien co-diagonalisable.

II.6 **II-6 Exemples.**

$A\overline{A} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = I_2$, donc d'après I.3.a, A est co-diagonalisable.

$B\overline{B} = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Or les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas des réels positifs ou nuls. Donc B n'est pas co-diagonalisable.

$C\overline{C} = 0$. C et $C\overline{C}$ n'ont pas même rang, donc C n'est pas co-diagonalisable.

$D\overline{D} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $D\overline{D}$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des réels positifs. De plus D et $D\overline{D}$ sont inversibles et par conséquent de même rang. D est donc co-diagonalisable.