DM n°5 (pour le 05/11/2010) PSI* 10-11

MATHEMATIQUES 2 Options M et P Durée : 4 heures

L'objectif du problème est d'étudier certains endomorphismes de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes.

La partie IV peut être traitée indépendamment des autres parties.

Préliminaires

$\mathcal{M}$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes. On considère les matrices :

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. I désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{L}$ désigne l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{M}$.

Si U_1, U_2, U_3, U_4 sont 4 matrices de $\mathcal{M}$, on considère la matrice bloc carrée d'ordre 4 :

$M = \left(\begin{array}{c|c} U_1 & U_3 \\ \hline U_2 & U_4 \end{array}\right)$.

Donner la valeur du déterminant de M en fonction des déterminants des U_i lorsque U_2 est la matrice nulle. On notera dét(A) le déterminant d'une matrice carrée A .

I - Soient A et B deux matrices données de $\mathcal{M}$.
On désigne par Φ l'application de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ définie par : $\Phi(X) = A.X.B$ pour toute matrice X de $\mathcal{M}$.

1 - Montrer que Φ appartient à $\mathcal{L}$.

2 - L'espace vectoriel $\mathcal{M}$ étant rapporté à la base $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$, on désigne par $A \circ B$ la matrice carrée d'ordre 4 associée à Φ dans la base $\mathcal{B}$.

On pose $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix}$. Montrer que l'on a : $A \circ B = \left(\begin{array}{c|c} b_1 A & b_2 A \\ \hline b_3 A & b_4 A \end{array}\right)$.

3 - Montrer que si A, B, P, Q sont quatre éléments quelconques de $\mathcal{M}$, on a : $(P \circ Q).(A \circ B) = (P.A) \circ (B.Q)$.

4 - Calculer dét($A \circ I$), dét($I \circ A$) et dét($A \circ B$) en fonction de dét(A) et dét(B).

II - 1 - Soient $A_1, A_2 \ldots A_k, B_1, B_2 \ldots B_k$, des matrices non nulles de $\mathcal{M}$. On leur associe l'application H de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ définie par : $\forall X \in \mathcal{M}$, $H(X) = \sum_{i=1}^{k} A_i \cdot X \cdot B_i$.

Vérifier que : $H \in \mathcal{L}$.

Soit $\hat{H}$ la matrice associée à H dans la base $\mathcal{B}$.

On note $\hat{H} = \left(\begin{array}{c|c} U_1 & U_3 \\ \hline U_2 & U_4 \end{array}\right)$ et $B_i = \left(\begin{array}{c|c} b_1^{(i)} & b_3^{(i)} \\ \hline b_2^{(i)} & b_4^{(i)} \end{array}\right)$ pour $1 \leq i \leq k$.

Exprimer les matrices U_i à l'aide des matrices A_i et des éléments des matrices B_j.

2 - On suppose que les matrices A_j $(1 \leq j \leq k)$ constituent dans $\mathcal{M}$ un système libre et que les matrices $B_1, B_2, \dots B_k, B_1', B_2' \dots, B_k'$ de $\mathcal{M}$ sont telles que pour toute matrice X de $\mathcal{M}$, $\sum_{i=1}^{k} A_i \cdot X \cdot B_i = \sum_{i=1}^{k} A_i \cdot X \cdot B_i'$.

Montrer alors que : $B_i = B_i'$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Peut-on en déduire des propriétés analogues pour les matrices A_i et A_i' $(i \in \{1, \dots, k\})$ lorsque les matrices B_i $(1 \leq i \leq k)$ constituent dans $\mathcal{M}$ un système libre ?

3 - Soit $L \in \mathcal{L}$ de matrice associée $\hat{L} = \left(\begin{array}{c|c} V_1 & V_3 \\ \hline V_2 & V_4 \end{array}\right)$ relativement à $\mathcal{B}$, la base de $\mathcal{M}$ définie précédemment. et $L \neq 0$

Montrer qu'il existe un entier $\beta \in \{1, 2, 3, 4\}$ et des matrices $C_1, C_2, \dots, C_\beta, D_1, D_2, \dots, D_\beta$ vérifiant pour toute matrice X de $\mathcal{M}$ la relation

(1) : $L(X) = \sum_{i=1}^{\beta} C_i \cdot X \cdot D_i$ ou, de façon équivalente, la relation

(1') : $\hat{L} = \sum_{i=1}^{\beta} C_i \circ D_i$. On dira que (1) définit une décomposition de L de longueur β.

Montrer que si β a la plus petite valeur non nulle possible dans toutes les décompositions de L, élément de $\mathcal{L}$, alors les familles $(C_1, C_2, \dots, C_\beta)$ et $(D_1, D_2, \dots, D_\beta)$ constituent des familles libres de $\cancel{\mathcal{L}}$ $\mathcal{M}$

4 - a - Soit T la transformation qui associe à toute matrice X de $\mathcal{M}$, la matrice $T(X) = {}^tX$ (${}^tX$ désigne la matrice transposée de X). Donner l'expression de $T(X.Y)$ en fonction de $T(X)$ et $T(Y)$, pour tout couple (X, Y) de matrices de $\mathcal{M}$.

Prouver que $T \in \mathcal{L}$. Quelle est la matrice $\hat{T}$ associée à T dans la base $\mathcal{B}$?

b - Montrer que la longueur de toute décomposition de T est 4.

c - Déterminer D_1, D_2, D_3, D_4, quatre matrices de $\mathcal{M}$ telles que : $\hat{T} = \sum_{i=1}^{4} E_i \circ D_i$.

III - Dans ce paragraphe, on désigne par Γ un élément de $\mathcal{L}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) Γ est bijective

(2) $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}^2$, $\Gamma(X . Y) = \Gamma(X) . \Gamma(Y)$.

On se propose de déterminer l'expression de $\Gamma(X)$.

1 - Question préliminaire :

Soit n un entier strictement positif, soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$ et f un endomorphisme de $\mathcal{V}$ représenté par la même matrice dans toutes les bases de $\mathcal{V}$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tel que $\forall\ V \in \mathcal{V},\ f(V) = \lambda.V$). Que peut-on dire d'une matrice X carrée d'ordre n à coefficients complexes telle que $S.X.S^{-1} = X$ pour toute matrice S carrée d'ordre n, à coefficients complexes et inversible ?

2 - Montrer que Γ vérifie les propriétés suivantes :

a - $\Gamma(X_0) = I \Rightarrow X_0 = I$.

b - X est inversible $\Leftrightarrow \Gamma(X)$ est inversible.

3 - On considère une décomposition de Γ de longueur minimale β ($1 \le \beta \le 4$) notée :

$$\Gamma(X) = \sum_{i=1}^{\beta} A_i.X.B_i \quad (3) \quad \text{pour toute matrice X de } \mathcal{M}.$$

Exprimant sur cette décomposition la propriété (2), montrer que l'on a :

$\forall i \in \{1, \dots, \beta\},\ \forall\ Y \in \mathcal{M},\ Y.B_i = B_i.\Gamma(Y)$ et $A_i.Y = \Gamma(Y).A_i$.

4 - Calculer, pour toute matrice Y inversible de $\mathcal{M}$, le produit :

$\Gamma(Y^{-1}).A_i.B_j.\Gamma(Y),\ 1 \le i \le \beta,\ 1 \le j \le \beta$.

Montrer que toutes les matrices $A_i.B_j$ sont scalaires.

Montrer que, si toutes les matrices $A_i.B_j$ étaient nulles, Γ ne serait pas bijective.

Donner la valeur de β et la forme générale de Γ.

IV - A toute matrice X de $\mathcal{M}$, on associe son déterminant $\Delta(X)$=dét(X) ; Δ est une application de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{C}$.

1 - Montrer que Δ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}$.

Quelle est la matrice de Δ relativement à la base $\mathcal{B}$?

Quel est le rang de cette matrice ? Soit $\tilde{\Delta}$ la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique Δ.

Écrire $\widehat{\Delta}(X, Y)$ en fonction des coefficients des matrices X et Y, éléments de $\mathcal{M}$.

partie réservée aux 5/2

2 - On se propose de déterminer les formes quadratiques non nulles Φ sur $\mathcal{M}$ qui vérifient : $\forall\ (X, Y) \in \mathcal{M}^2,\ \Phi(X.Y) = \Phi(X).\Phi(Y)$.

Démontrer les propriétés suivantes :

a - $\Phi(I) = 1$.

b - Si X est inversible, alors $\Phi(X) \neq 0$.

c - Si X est non inversible, alors $\Phi(X) = 0$.

On pourra démontrer que si le rang de X est 1, alors $\exists (P, Q) \in \mathcal{M}^2$, $P.X.Q = E_2$.

d - En considérant les deux équations en λ : $\Delta(X+\lambda I) = 0$ et $\Phi(X+\lambda I) = 0$, montrer que l'on a $\Phi = \Delta$.