ENDOMORPHISMES DONT LE POLYNÔME MINIMAL EST DE DEGRÉ $n-1$

Notations et rappels :

On considère un espace vectoriel E, de dimension finie $n \geqslant 3$, sur le corps $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\mathscr{L}(\mathrm{E})$ désigne la $\mathbb{K}$-algèbre des endomorphismes de E.

Si $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, $u \circ v$ se note uv et l'identité de E est notée Id_{E}.

Pour $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{P}=\sum_{k=0}^{m} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(u)$ désigne l'endomorphisme $\sum_{k=0}^{m} a_k u^k$ où les u^p sont définis par les relations $u^0=\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $u^p = u u^{p-1}$. On «rappelle» que si $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, les endomorphismes $\mathrm{P}(u)$ et $\mathrm{Q}(u)$ commutent.

Si u est un endomorphisme de E, le polynôme minimal de u sera noté π_u et le polynôme caractéristique se notera χ_u ; on rappelle que π_u est le polynôme normalisé de degré minimal annulateur de u, c'est le générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs de u, et que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_u(\lambda)=\det(u-\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$$

Un endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p=0$. On rappelle que pour un tel endomorphisme, en dimension n, le polynôme caractéristique vaut $(-1)^n \mathrm{X}^n$.

On admettra ici le théorème suivant (cf. DS n°3 et feuille d'exercices n°2...) :

Théorème de Bezout

> Deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ sont premiers entre eux si et seulement si il existe
> deux polynômes A et B tels que $\mathrm{AP}+\mathrm{BQ}=1$.

1ère partie : Résultats préliminaires

A - Le théorème de décomposition des noyaux

1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, et P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ premiers entre eux. En utilisant le théorème de Bezout, montrer que

$$\operatorname{Ker} \mathrm{PQ}(u)=\operatorname{Ker} \mathrm{P}(u) \oplus \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(u)$$

2. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On suppose que A est premier avec B et que A est premier avec C.
En utilisant le théorème de Bezout, montrer que A est premier avec BC.

3. Déduire des deux questions précédentes le *théorème de décomposition des noyaux :*

Soient $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_r$ r polynômes de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, premiers entre eux deux à deux, et $\mathrm{P}=\prod_{i=1}^{r} \mathrm{P}_i$.

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Alors :

$$\operatorname{Ker} \mathrm{P}(u)=\bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} \mathrm{P}_i(u).$$

B - Calcul de la dimension d'un sous-espace vectoriel de E

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, λ une valeur propre de u et $p \in \mathbb{N}^*$ son ordre de multiplicité ; on sait qu'il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\chi_u=(\mathrm{X}-\lambda)^p \mathrm{Q} \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}(\lambda) \neq 0.$$

On pose $\mathrm{F}_\lambda=\operatorname{Ker}(u-\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^p$ (F_λ s'appelle le *sous-espace vectoriel caractéristique associé à* λ).

1. Montrer que $\mathrm{E}=\mathrm{F}_\lambda \oplus \operatorname{Ker} \mathrm{Q}(u)$ et que les sous-espaces vectoriels F_λ et $\operatorname{Ker} \mathrm{Q}(u)$ sont stables par u.

2. On désigne par v (respectivement w) l'endomorphisme de F_λ (respectivement $\operatorname{Ker} \mathrm{Q}(u)$) induit par u.

a) Que peut-on dire de l'endomorphisme $v-\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{F}_\lambda}$ de F_λ ?

b) Calculer χ_v en fonction de λ et de $d=\dim \mathrm{F}_\lambda$, puis montrer que

$$\chi_u=(-1)^d(\mathrm{X}-\lambda)^d \chi_w$$

avec la convention $\chi_w=1$ si $\operatorname{Ker} \mathrm{Q}(u)=\{0_{\mathrm{E}}\}$.

c) Montrer que $\chi_w(\lambda) \neq 0$ et en conclure que $p=d$.

C - Un résultat sur le polynôme minimal

Soit u un endomorphisme de E.

1. Soit $x \in \mathrm{E}\setminus\{0_{\mathrm{E}}\}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire (=normalisé) de degré minimal noté $\pi_{x,u} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\pi_{x,u}(u)(x) = 0_{\mathrm{E}}$, puis justifier que $\pi_{x,u}$ divise π_u.

2. On pose $\pi_u = \mathrm{P}_1^{\alpha_1}\ldots\mathrm{P}_r^{\alpha_r}$ où $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in(\mathbb{N}^*)^r$ et les P_i sont irréductibles et deux à deux distincts.
Soit $i \in [\![1,r]\!]$. Montrer que $\operatorname{Ker}\mathrm{P}_i^{\alpha_i-1}(u) \subsetneq \operatorname{Ker}\mathrm{P}_i^{\alpha_i}(u)$ (*on pourra raisonner par l'absurde*).
En déduire qu'il existe $x_i \in \operatorname{Ker}\mathrm{P}_i^{\alpha_i}(u)$, non nul, tel que $\pi_{x_i,u} = \mathrm{P}_i^{\alpha_i}$.

3. On pose alors $e = x_1+\cdots+x_r$. Déduire du théorème de décomposition des noyaux que $\pi_{e,u} = \pi_u$.

2ème partie : Étude de $\mathscr{C} = \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}),\ \deg(\pi_u) = n-1\}$

A- Le cas d'un endomorphisme nilpotent

Soit $v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$; on suppose que $v^{n-1} = 0$ et $v^{n-2} \neq 0$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\operatorname{Ker} v^k \subset \operatorname{Ker} v^{k+1}$$
et que
$$\operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^{k+1} \Longrightarrow \operatorname{Ker} v^{k+1} = \operatorname{Ker} v^{k+2}.$$

2. En déduire
$$\{0_{\mathrm{E}}\} \subsetneq \operatorname{Ker} v \subsetneq \operatorname{Ker} v^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \operatorname{Ker} v^{n-2} \subsetneq \operatorname{Ker} v^{n-1} = \mathrm{E}.$$

3. Montrer alors que, pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$,
$$k \leqslant \dim(\operatorname{Ker} v^k) \leqslant k+1$$

4. Supposons que, pour $p \in [\![1, n-2]\!]$ on ait : $\dim(\operatorname{Ker} v^p) = p$ et $\dim(\operatorname{Ker} v^{p+1}) = p+2$; montrer que $\dim(\operatorname{Ker} v^p) \geqslant \dim(\operatorname{Ker} v^{p-1})+2$ et en déduire une contradiction. (*on pourra considérer un supplémentaire* F *de* $\operatorname{Ker} v^p$ *dans* $\operatorname{Ker} v^{p+1}$ *et utiliser* $v(\mathrm{F})$).

5. En déduire que, pour tout $q \in [\![1, n-2]\!]$, $\dim(\operatorname{Ker} v^q) = q+1$.

6. Montrer que $\operatorname{Ker} v$ n'est pas inclus dans $\operatorname{Im} v$. (*on pourra raisonner par l'absurde et considérer l'endomorphisme* g *induit par* v *sur* $\operatorname{Im} v$).

7. Soient $x_0 \in \operatorname{Ker} v \setminus \operatorname{Im} v$ et $y \in \mathrm{E}\setminus\operatorname{Ker} v^{n-2}$.

- **a)** Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{H} = \operatorname{Vect}(\{y, v(y), \ldots, v^{n-2}(y)\})$?
- **b)** Vérifier que H et $\mathbb{K}x_0$ sont supplémentaires dans E et que H est stable par v.
- **c)** Vérifier que $(y, v(y), \ldots, v^{n-2}(y), x_0)$ est une base de E et écrire la matrice J de v dans cette base.

B- Cas général

1. Soient $\mathrm{R} = \mathrm{X}^{n-1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de R. Soient $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E et u l'endomorphisme de E dont la matrice M relativement à $\mathscr{B}$ est

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-3} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad (1)$$

- **a)** Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, exprimer $u^k(e_1)$ en fonction des éléments de la base $\mathscr{B}$.
- **b)** Calculer $\mathrm{R}(u)(e_1)$ puis $\mathrm{R}(u)(e_k)$ pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, et enfin $\mathrm{R}(u)(e_n)$; en déduire que R est un polynôme annulateur de u.
- **c)** Montrer que le degré du polynôme minimal π_u de u est supérieur ou égal à $n-1$ et en déduire que R coïncide avec π_u puis que $u \in \mathscr{C}$. (*on pourra raisonner par l'absurde*).
- **d)** Déterminer χ_u en fonction de R et α.

2. Soit $u \in \mathscr{C}$.

a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\chi_u = (-1)^n (X-\alpha)\pi_u$ et que $\pi_u(\alpha) = 0$.

Dans la suite, k désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre α de u. On sait, puisque $\chi_u = (-1)^n(X-\alpha)\pi_u$, qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\pi_u = (X-\alpha)^{k-1} Q \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0.$$

b) Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_E)^k \oplus \mathrm{Ker}\, Q(u) = \mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_E)^{k-1} \oplus \mathrm{Ker}\, Q(u)$$

et en déduire que

$$\mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_E)^{k-2} \subsetneq \mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_E)^{k-1} = \mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_E)^k$$

c) On désigne par v l'endomorphisme de $\mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_E)^k$ induit par $u - \alpha \mathrm{Id}_E$.

i. Vérifier que $v^{k-1} = 0$ et $v^{k-2} \neq 0$.

ii. En déduire qu'il existe un vecteur propre x_0 de u, associé à la valeur propre α, et un sous-espace vectoriel H_1 de $\mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_E)^k$, stable par u, tels que

$$\mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_E)^k = \mathbb{K}x_0 \oplus H_1$$

d) Montrer que la somme $H = H_1 + \mathrm{Ker}\, Q(u)$ est directe et que le sous-espace vectoriel H est un supplémentaire de $\mathbb{K}x_0$ dans E, qui est stable par u.

e) On désigne par w l'endomorphisme induit par u sur H.

i. Montrer que $\chi_u = (\alpha - X)\chi_w$, puis en déduire $\pi_w(\alpha)$.

ii. Montrer que π_w est un polynôme annulateur de u, puis que $\deg(\pi_w) = n-1$.

f) En utilisant la question C.3 de la première partie, montrer que H possède une base de la forme $(e, w(e), \ldots, w^{n-2}(e))$ avec $e \in H$, et écrire la matrice de w dans cette base.

g) Construire alors une base $\mathscr{B}_1$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme (1).

3. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, π_A son polynôme minimal. Montrer que $\deg(\pi_A) = n-1$ si et seulement si il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $a_0, \ldots, a_{n-2}, \alpha$ éléments de $\mathbb{K}$ avec $\alpha^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \alpha^k$ tels que $P^{-1}AP$ soit de la forme (1).

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆