CORRIGÉ : NORMES MATRICIELLES – CCP PC 2002

Partie I

I.1 **a)** Soit $M \in M_{n+1}(\mathbb{C})$. Notons $\chi_M = \det(M - XI_{n+1})$ le polynôme caractéristique de M. χ_M est de degré $n+1 \geqslant 1$, donc admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$, donc M admet au moins une valeur propre λ .

b) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{n+1}$ canoniquement associé à M.

Soit V_1 un vecteur propre associé à λ . D'après le théorème de la base incomplète , il existe $V_2, ..., V_{n+1}$ tels que $B' = (V_1, V_2, ..., V_{n+1})$ soit une base de $\mathbb{C}^{n+1}$. Soit Q la matrice de passage de la base canonique à la base B' et $M' = mat_{B'}(u)$. On a : $u(V_1) = \lambda V_1$ donc $M' = \begin{pmatrix} \lambda & m'_{1,2} & \cdots & m'_{1,n+1} \\ 0 & m'_{2,2} & \cdots & m'_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & m'_{n+1,2} & \cdots & m'_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$

Notons $N = \begin{pmatrix} m'_{2,2} & \cdots & m'_{2,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m'_{n+1,2} & \cdots & m'_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$, $N \in M_n(\mathbb{C})$ et $L = (m'_{1,2}, ..., m'_{1,n+1})$, $L \in M_{1,n}(\mathbb{C})$:

$$\boxed{M' = Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0_{n,1} & N \end{pmatrix}}$$

c) D'après l'hypothèse faite au début de la question , N est trigonalisable , donc : $\exists H \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $S = H^{-1}NH$ soit triangulaire supérieure . On a : $N = HSH^{-1}$ et $S \in T_n(\mathbb{C})$

d) On pose $R' = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & H^{-1} \end{pmatrix}$: $R'R = I_{n+1}$, donc : $R \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$ et $R^{-1} = R'$

e) Soit $M'' = R^{-1}M'R$. Posons $P = QR$: $M'' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda & LH \\ 0_{n,1} & S \end{pmatrix}$; S est triangulaire supérieure donc M'' aussi . En conclusion : M est trigonalisable .

I.2 Si $n = 1$: toute matrice $M \in M_1(\mathbb{C})$ est triangulaire , donc trigonalisable .
D'après 1) , si toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable , alors toute matrice $M \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ est trigonalisable . On peut conclure à l'aide du principe de récurrence que :
toute matrice carrée complexe est trigonalisable

I.3 **a)** $\chi_G = \det(G - XI_3) = (1-X)^3$; 1 est valeur propre d'ordre 3 et $G \neq I_3 \Rightarrow \dim[\ker(G - I_3)] \neq 3$ donc G n'est pas diagonalisable .

b) $rg(G - I_3) = 2$ donc $\dim[\ker(G - I_3)] = 1$, $\boxed{u = e_1 - e_3}$ engendre $\ker(G - I_3)$ et tout autre vecteur propre est de la forme αu donc de première composante $\alpha \neq 1$.
$\det(u, e_2, e_3) = 1$ donc $B' = (u, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

c) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1}GQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. $L = (1,0)$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. 1 est valeur propre double de N et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé . Soit $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $S = H^{-1}NH = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $LH = (1,0)$;

$$\boxed{P = QR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; P^{-1}GP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

I.4 2 matrices semblables ont le même polynôme caractéristique ; les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les termes de la diagonale . Donc si $A \in M_n(\mathbf{C})$ est semblable à $T \in T_n(\mathbf{C})$, alors
les termes diagonaux de T sont les valeurs propres de A

I.5 **a)** Par hypothèse : $j < i \Rightarrow s_{i,j} = t_{i,j} = 0$. Soit $U = ST = (u_{i,j})$: $u_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} s_{i,k} t_{k,j}$. Si $i > j$ alors pour $k < i$: $s_{i,k} = 0$ et pour $k \geqslant i$, $k > j \Rightarrow t_{k,j} = 0$ donc $u_{i,j} = 0$.
Donc $ST \in T_n(\mathbf{C})$. Enfin si $i = j$ seul $k = i$ donne un terme non nul : $u_{i,i} = s_{i,i} t_{i,i}$

b) On prend $S = T : T^2 \in T_n(\mathbf{C})$, de t. diagonaux $\left(t_{i,i}\right)^2$. Par récurrence : si $T^p \in T_n(\mathbf{C})$, de t. diagonaux $\left(t_{i,i}\right)^p$, on prend $S = T^p$ d'où $T^{p+1} \in T_n(\mathbf{C})$, de t. diagonaux $\left(t_{i,i}\right)^{p+1}$.

I.6 Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. D'après 2) , $\exists T \in T_n(\mathbb{C})$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $T = P^{-1}AP$. D'après 4) , les termes diagonaux $t_{1,1},...,t_{n,n}$ de T sont les valeurs propres $\lambda_1,...,\lambda_n$ de A . D'après 5) , les termes diagonaux de T^k sont $(\lambda_1)^k,...,(\lambda_n)^k$; d'après 4) et $T^k = P^{-1}A^kP$, ce sont les valeurs propres de A^k . Donc $\rho(A^k) = \max\left\{\left|(\lambda_i)^k\right| , 1 \leqslant i \leqslant n\right\} = (\max\{|\lambda_i| , 1 \leqslant i \leqslant n\})^k$

Conclusion : $\boxed{\rho(A^k) = [\rho(A)]^k}$

I.7 $\forall A \in M_n(\mathbf{C})$, $\psi(A)$ existe et $\psi(A) \geqslant 0$; $\psi(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$; $\forall A \in M_n(\mathbf{C}), \forall \lambda \in \mathbf{C}$, $\psi(\lambda A) = |\lambda|\psi(A)$
$\forall A, B \in M_n(\mathbf{C})$, $\psi(A+B) \leqslant \psi(A) + \psi(B)$: $\underline{\psi \text{ est une norme sur } M_n(\mathbf{C})}$
Soit $U \in M_n(\mathbf{C})$ tq $\forall i,j, u_{i,j} = 1$: $\psi(U) = 1$, $U^2 = nU$ donc $\psi(U^2) = n$ et $\underline{\text{si } n \geqslant 2}$ l'inégalité : $\psi(U \times U) \leqslant \psi(U) \times \psi(U)$ n'est pas vérifiée , donc $\underline{\psi \text{ n'est pas une norme matricielle}}$

I.8 La norme N et une norme matricielle φ sont équivalentes car $M_n(\mathbf{C})$ est un EV de dim finie . Par définition :
$\exists \alpha , \beta > 0$ tq $\forall A \in M_n(\mathbf{C})$, $\alpha\varphi(A) \leqslant N(A) \leqslant \beta\varphi(A)$
Alors $\forall A, B \in M_n(\mathbf{C})$, $N(AB) \leqslant \beta\varphi(AB) \leqslant \beta\varphi(A)\varphi(B) \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$

I.9 Soit $\forall k$, $B_k = P^{-1}A_kP$ et $B = P^{-1}AP$. $\forall k$, $B_k - B = P^{-1}(A_k - A)P$
Soit N une norme matricielle : $0 \leqslant N(B_k - B) \leqslant N(P^{-1})N(A_k - A)N(P)$ d'où : $N(A_k - A) \to 0$ qd $k \to +\infty$ $\Rightarrow N(B_k - B) \to 0$ qd $k \to +\infty$
Réciproque : si (B_k) CV vers B , alors $\left(PB_kP^{-1}\right)$ CV vers PBP^{-1} d'où (A_k) CV vers A

I.10 **a)** $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $T^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1}\mu \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$. A_k de terme général $a_{i,j}^{(k)}$ CV vers A si et seulement si $\forall i,j$, $a_{i,j}^{(k)} \to a_{i,j}$ qd $k \to +\infty$. Donc la suite $\left(T^k\right)$ CV ssi les suites complexes $\left(\lambda^k\right)$ et $\left(k\lambda^{k-1}\mu\right)$ CV; ssi $\boxed{[|\lambda| < 1 \text{ (la limite est alors } 0_2)] \text{ ou } \left[\lambda = 1 \text{ et } \mu = 0\ (\forall k , T^k = I_2)\right]}$

b) $\exists P \in GL_2(\mathbf{C})$ tq $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Alors $D^k = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k \end{pmatrix}$. D'après 9) $\left(A^k\right)$ CV ssi $\left(D^k\right)$ CV . Les cas de CV sont : $\begin{cases} |\lambda_i| < 1 \text{ pour } i = 1 \text{ et } 2 \text{ (limite } 0_2) \\ \lambda_i = 1 \text{ et } \left|\lambda_j\right| < 1 \text{ pour } i \neq j \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \end{cases}$

c) Si A n'est pas diagonalisable , nécéssairement ses valeurs propres sont égales . D'après 2) elle est trigonalisable : $\exists P \in GL_2(\mathbf{C})$ tq $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\mu \neq 0$ (sinon A serait diagonalisable) . Donc d'après a) , la suite $\left(T^k\right)$ CV ssi $|\lambda| < 1$ et d'après 9) , $\left(A^k\right)$ CV ssi $\left(T^k\right)$ CV . Ici $\rho(A) = |\lambda|$. Donc $\underline{\left(A^k\right) \text{ CV ssi } \rho(A) < 1 \text{ et la limite est } 0_2}$

d) D'après b) , si A est diagonalisable : $\left(A^k\right)$ CV vers 0_2 ssi $(|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_1| < 1)$, ssi $\rho(A) < 1$. En conclusion de b) et c) : $\boxed{\left(A^k\right) \text{ CV vers } 0_2 \text{ ssi } \rho(A) < 1}$

Partie II

II.1 **a)** Posons $Y = AX : \forall i, y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$. $\forall j$, $\left|x_j\right| \leqslant N_\infty(X) \Rightarrow \left|y_i\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n \left|a_{i,j}\right|\right) N_\infty(X) \leqslant M_A N_\infty(X)$ donc $N_\infty(AX) \leqslant M_A N_\infty(X)$

b) $\mathbf{C}^n$ est un EV de dim finie donc toute norme N sur $\mathbf{C}^n$ est équivalente à la norme N_∞ :
$\exists \alpha , \beta > 0$ tq $\forall X \in \mathbf{C}^n$, $\alpha N_\infty(X) \leqslant N(X) \leqslant \beta N_\infty(X)$
$N(AX) \leqslant \beta N_\infty(AX) \leqslant \beta M_A N_\infty(X) \leqslant \beta M_A \frac{1}{\alpha} N(X) \leqslant C_A N(X)$ en posant $C_A = \frac{\beta}{\alpha} M_A$

c) $\forall X \neq 0$, $\frac{N(AX)}{N(X)} \leqslant C_A$. L'ensemble $\left\{\frac{N(AX)}{N(X)} , X \in \mathbf{C}^n - \{0\}\right\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$ donc admet une borne supérieure .

d) Cette borne sup est le plus petit majorant et C_A est un majorant donc $\tilde{N}(A) \leqslant C_A$. Dans le cas de la norme N_∞ , on peut prendre $C_A = M_A$ donc : $\boxed{\tilde{N}_\infty(A) \leqslant M_A}$.

e) $X_0=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow GX_0=\begin{pmatrix}0\\3\\10\end{pmatrix}$. On a : $N_\infty(X_0)=1$, $N_\infty(GX_0)=10$ d'où $\frac{N_\infty(GX_0)}{N_\infty(X_0)}=10\Rightarrow \tilde N_\infty(G)\geqslant 10$.

De plus $M_G=10$ donc $\tilde N_\infty(G)\leqslant 10$. Conclusion : $\boxed{\tilde N_\infty(G)=M_G=10}$

II.2 $\forall j\,,\ |y_j|=1\Rightarrow N_\infty(Y)=1$. Soit $Z=AY$. $\forall i\,,\ |z_i|=\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j\right|\leqslant \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\leqslant M_A$

Si $a_{i_0j}=0$ alors $a_{i_0,j}y_j=0=|a_{i_0,j}|$, sinon $a_{i_0,j}y_j=|a_{i_0,j}|$ car $\forall u\in\mathbf{C}^*,\ u\frac{\overline u}{|u|}=|u|$. Donc $z_{i_0}=\sum_{j=1}^n|a_{i_0,j}|=M_A$. $N_\infty(Z)=M_A\Rightarrow \frac{N_\infty(AY)}{N_\infty(Y)}=M_A\Rightarrow \boxed{\tilde N_\infty(A)\geqslant M_A}$. En utilisant 1)d) on peut conclure : $\boxed{\tilde N_\infty(A)=M_A}$

II.3 **a)** $\tilde N(A)=0\Leftrightarrow \forall X\neq 0,\ N(AX)=0\Leftrightarrow \forall X\neq 0,\ AX=0\Leftrightarrow \forall X,\ AX=0\Leftrightarrow A=0_n$

b) $\forall X\neq 0,\ \frac{N(\lambda AX)}{N(X)}=\frac{|\lambda|N(AX)}{N(X)}\leqslant|\lambda|\tilde N(A)$ donc $\tilde N(\lambda A)\leqslant|\lambda|\tilde N(A)$

c) Si $\lambda\neq 0$: $\tilde N(A)=\tilde N(\frac{1}{\lambda}\lambda A)\leqslant\left|\frac{1}{\lambda}\right|\tilde N(\lambda A)\Rightarrow|\lambda|\tilde N(A)\leqslant\tilde N(\lambda A)$ d'où $|\lambda|\tilde N(A)=\tilde N(\lambda A)$

Si $\lambda=0$ on a égalité car les 2 membres sont nuls .

d) $\forall X\neq 0,\ N[(A+B)X]=N(AX+BX)\leqslant N(AX)+N(BX)\Rightarrow\frac{N[(A+B)X]}{N(X)}\leqslant\frac{N(AX)}{N(X)}+\frac{N(BX)}{N(X)}\leqslant\tilde N(A)+\tilde N(B)$ donc $\tilde N(A+B)\leqslant\tilde N(A)+\tilde N(B)$

e) $\forall X\neq 0,\ \frac{N(AX)}{N(X)}\leqslant\tilde N(A)\Rightarrow N(AX)\leqslant\tilde N(A)N(X)$ et si $X=0$ les 2 membres sont nuls .

f) On déduit de a),c),d) que $\tilde N$ est une norme sur $M_n(\mathbf{C})$. De plus :

$\forall A,B\in M_n(\mathbf{C})$, $\forall X\in\mathbf{C}^n$, $N(ABX)\leqslant\tilde N(A)N(BX)\leqslant\tilde N(A)\tilde N(B)N(X)$ d'où : $\tilde N(AB)\leqslant\tilde N(A)\tilde N(B)$

Conclusion : $\boxed{\tilde N \text{ est une norme matricielle sur } M_n(\mathbf{C})}$ (ce qui en prouve l'existence)

II.4 **a)** Soit $\lambda\in Sp(A)$ et X un vecteur propre associé : $X\neq 0$ et $AX=\lambda X\Rightarrow\frac{N(AX)}{N(X)}=|\lambda|$ donc $|\lambda|\leqslant\tilde N(A)$. En particulier pour λ telle que $|\lambda|=\rho(A)$. Donc $\boxed{\rho(A)\leqslant\tilde N(A)}$

b) Si $A=I_n$: $\rho(A)=1$ et $\forall X,\ AX=X$ donc $\tilde N(A)=1$: on a égalité .

c) Si $A\neq 0_n$ alors $\tilde N(A)\neq 0$ d'après 3)a) . Si de plus A est nilpotente , sa seule valeur propre est 0 donc $\rho(A)=0$ et : $\rho(A)<\tilde N(A)$

II.5 Si (A^k) converge vers 0_n alors $\tilde N(A^k)\to 0\ qd\ k\to+\infty$. $[\rho(A)]^k=\rho(A^k)\leqslant\tilde N(A^k)$ donc $[\rho(A)]^k\to 0\ qd\ k\to+\infty$. D'où : $\boxed{\rho(A)<1}$. (Réciproque admise)

II.6 **a)** De l'inégalité vue en 5) on déduit pour $k\in\mathbf{N}^*$: $\rho(A)\leqslant\left[\tilde N(A^k)\right]^{\frac1k}$

b) $\lambda\in Sp(A)\Leftrightarrow\alpha\lambda\in Sp(\alpha A)$ donc $\rho(\alpha A)=|\alpha|\rho(A)$

c) On prend $\alpha=\frac{1}{\rho(A)+\varepsilon}$ $(\alpha>0)$ et on applique a) : $\rho(A_\varepsilon)=\alpha\rho(A)=\frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon}<1$ car $\varepsilon>0$

D'après le résultat admis de 5) , $(A_\varepsilon)^k$ CV vers 0 donc $\exists k_\varepsilon$ tq $\forall k\geqslant k_\varepsilon$, $\tilde N\left((A_\varepsilon)^k\right)\leqslant 1$.

$(A_\varepsilon)^k=\alpha^kA^k\Rightarrow\tilde N\left((A_\varepsilon)^k\right)=\alpha^k\tilde N(A^k)$ Donc $\alpha^k\tilde N(A^k)\leqslant 1\Rightarrow\tilde N(A^k)\leqslant(\rho(A)+\varepsilon)^k$.

d) $\forall k\geqslant k_\varepsilon$, $\rho(A)\leqslant\left[\tilde N(A^k)\right]^{\frac1k}\leqslant\rho(A)+\varepsilon$: c'est la définition de : $\lim_{k\to+\infty}\left[\tilde N(A^k)\right]^{\frac1k}=\rho(A)$

Partie III

III.1 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ vérifie $A\geqslant 0$, $A\neq 0$ mais pas $A>0$

III.2 **a)** Soit $U=AA'$; $V=BB'$. $\forall i,j$, $u_{i,j}=\sum_{k=1}^n a_{i,k}a'_{k,j}$; $v_{i,j}=\sum_{k=1}^n b_{i,k}b'_{k,j}$. Par hyp : $\forall i,j$, $0\leqslant a_{i,j}\leqslant b_{i,j}$ et $0\leqslant a'_{i,j}\leqslant b'_{i,j}$ donc $\forall i,j$, $0\leqslant u_{i;j}\leqslant v_{i,j}$: $0\leqslant AA'\leqslant BB'$

b) On prend $A'=A$ et $B'=B$ et on procède par récurrence .

c) Rappelons que $\tilde N_\infty(A)=M_A$. Or $\forall i$, $\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|=\sum_{j=1}^n a_{i,j}\leqslant\sum_{j=1}^n b_{i,j}$ d'où en passant au sup : $M_A\leqslant M_B$ donc $\underline{\tilde N_\infty(A)\leqslant\tilde N_\infty(B)}$

d) D'après b) et c) : $\forall k$, $0\leqslant A^k\leqslant B^k\Rightarrow\tilde N_\infty(A^k)\leqslant\tilde N_\infty(B^k)\Rightarrow\left[\tilde N_\infty(A^k)\right]^{\frac1k}\leqslant\left[\tilde N_\infty(B^k)\right]^{\frac1k}$ d'où en passant àla limite : $\underline{\rho(A)\leqslant\rho(B)}$

e) Par hyp : $\forall i,j$, $0 \leqslant a_{i,j} < b_{i,j}$. Si $A \neq 0_n$, soit $c = \sup_{i,j}\{\frac{a_{i,j}}{b_{i,j}}\}$. On a un nombre fini de termes tous strictement inférieurs à 1 et non tous nuls donc $c < 1$ et $c > 0$. Si $A = 0_n$ tout $c \in]0,1[$ convient . $\forall i$, $a_{i,j} \leqslant c b_{i,j}$ donc $A \leqslant cB$

D'après d) et II 6)b) : $\rho(A) \leqslant c\rho(B)$. Enfin B admet au moins une valeur propre non nulle car $Tr(B) = \sum_{i=1}^n b_{i,i} > 0$ et $Tr(B)$ est la somme des valeurs propres de B . Donc $\rho(B) > 0$ et $c < 1$ donc $c\rho(B) < \rho(B)$ et en conclusion : $\underline{\rho(A) < \rho(B)}$

III.3 Soit $V \in \mathbf{C}^n$ tq $\forall i$, $v_i = 1$. $AV = \alpha V$ donc $\boxed{\alpha \in Sp(A)}$ (et $\alpha \geqslant 0$) . On en déduit que : $\alpha \leqslant \rho(A)$. Pour cette matrice on a : $M_A = \alpha$ et d'après II 2) : $\widetilde{N}_\infty(A) = M_A = \alpha$; d'après II 4)a) $\rho(A) \leqslant \widetilde{N}_\infty(A)$ donc : $\boxed{\widetilde{N}_\infty(A) = \rho(A) = \alpha}$

III.4 Si $\alpha = 0$ l'inégalité $\alpha \leqslant \rho(A)$ est évidente . Si $\alpha > 0$, on a $\forall i$, $\sum_{j=1}^n b_{i,j} = \frac{\alpha}{\alpha_i}\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \alpha$ B vérifie les hypothèses de 3) donc $\rho(B) = \alpha$. De plus $\forall i,j$, $0 \leqslant b_{i,j} \leqslant a_{i,j}$ donc $0 \leqslant B \leqslant A$ et d'après 2)d) : $\rho(B) \leqslant \rho(A)$. Donc $\alpha \leqslant \rho(A)$ et $\alpha = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n a_{i,j}$

On a déjà vu que $\rho(A) \leqslant M_A$ et $M_A = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n a_{i,j}$

III.5 Soit $U = AD_x$: $\forall i,j$, $u_{i,j} = x_j a_{i,j}$. Soit $V = D_x^{-1}U$: $\forall i,j$, $v_{i,j} = \frac{1}{x_i}u_{i,j} = \frac{x_j}{x_i}a_{i,j}$. A et V sont semblables donc $\rho(A) = \rho(V)$. Notons $Y = AX$: $\sum_{j=1}^n v_{i,j} = \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^n x_j a_{i,j} = \frac{y_i}{x_i}$ donc d'après 4) : $\min_i \frac{y_i}{x_i} \leqslant \rho(V) \leqslant \max\limits_i \frac{y_i}{x_i}$

d'où : $\boxed{\min_i \frac{(AX)_i}{x_i} \leqslant \rho(A) \leqslant \max\limits_i \frac{(AX)_i}{x_i}}$

III.6 Si X est vecteur propre strictement positif de A : $AX = \lambda X$ et on peut appliquer 5) : $\forall i$, $\frac{(AX)_i}{x_i} = \lambda$ donc $\lambda \leqslant \rho(A) \leqslant \lambda$ donc $\boxed{\lambda = \rho(A)}$; les ensembles $\left\{\min_i \frac{(AX)_i}{x_i}, X > 0\right\}$ et $\left\{\max\limits_i \frac{(AX)_i}{x_i}, X > 0\right\}$ admettent $\rho(A)$ pour respectivement maximum et minimum .