ENDOMORPHISMES DE $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ CONSERVANT LE RANG, LE DÉTERMINANT, LE SPECTRE

Notations

E désigne ici l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, où n est un entier $\geqslant 2$, et $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrés d'ordre n à coefficients complexes.

Dans tout le problème, on identifie les matrices colonnes à n coefficients complexes aux éléments de E, et on considère les matrices lignes à n coefficients complexes comme les transposées des élément de E. Ainsi, pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $X \in E$ et $Y \in E$ de transposée ${}^tY$, la multiplication usuelle des matrices permet de considérer les produits

$$AB \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}), \qquad AX \in E, \qquad X^tY \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$$

ainsi que la matrice ligne ${}^tYB$ et le nombre complexe ${}^tYX$.

La matrice unité pour la multiplication dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est notée I.

Pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, le rang, la trace et le déterminant de A sont respectivement notés $\operatorname{rg} A$, $\operatorname{tr} A$ et $\det A$; le spectre de A, c'est-à-dire la famille de ses valeurs propres *comptées chacune avec son ordre de multiplicité*, est noté $\operatorname{Sp} A$.

Si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle adjointe de A la matrice $A^* = {}^t\overline{A}$; A est dite unitaire si $AA^* = I$.

Première partie

On considère ici l'endomorphisme Γ de l'espace vectoriel $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\Gamma(M) = -M + \operatorname{tr}(M)I$$

pour toute $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

I.1 Quelles sont les valeurs propres de Γ, les sous-espaces propres associés et leurs dimensions ?

I.2 L'endomorphisme Γ est-il diagonalisable ? Trouver un poly du second degré annulé par Γ. Donner la valeur explicite de Γ^{-1} (on pourra noter $\mathscr{I}$ l'identité de $\mathscr{L}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$).

I.3 Si $n \geqslant 3$ et $\operatorname{rg} M = n$, distinguer, à l'aide d'une condition liant $\operatorname{tr} M$ et $\operatorname{Sp} M$ le cas où $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}\Gamma(M)$ du cas où $\operatorname{rg} M \neq \operatorname{rg}\Gamma(M)$.

I.4 On suppose dans cette question que $n = 2$.

a) Si $n = 2$, que penser de Γ^{-1} ? Montrer que M et $\Gamma(M)$ ont même polynôme caractéristique, puis que

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}\Gamma(M), \quad \det M = \det\Gamma(M), \quad \operatorname{Sp} M = \operatorname{Sp}\Gamma(M).$$

b) Déterminer les matrices unitaires A telles que, pour toute $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$

$$\Gamma(M) = A^tMA^*$$

Deuxième partie

Dans toute cette partie, Φ désigne un endomorphisme de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le rang, c'est-à-dire tel que

$$\forall M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}), \quad \operatorname{rg}\Phi(M) = \operatorname{rg} M$$

II.1 a) Montrer que $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice de rang 1 si et seulement si il existe X et Y éléments non nuls de E tels que

$$A = X^tY$$

Préciser alors l'image de A et son noyau.

Que peut-on en déduire si $A = X^tY = X'^tY'$?

b) Montrer que $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice de rang 2 si et seulement si il existe X, Y, Z, W quatre éléments de E tels que

$$(X,Z) \text{ libre}, \quad (Y,W) \text{ libre} \quad \text{et} \quad A = X^tY + Z^tW$$

II.2 a) Soient X et Y deux éléments non nuls de E. Vérifier qu'il existe deux éléments U, V de E tels que

$$\Phi(X^tY) = U^tV$$

Pour X, Y donnés, U et V sont-ils uniques ?

b) On fixe Y_0 non nul dans E, et on fait l'hypothèse suivante :

$$(H_1)\quad \exists(X_1,X_2)\in(E\setminus\{0\})^2,\quad \exists(U_1,U_2)\in E^2 \text{ libre},\quad \exists(V_1,V_2)\in E^2 \quad \text{tels que } \begin{cases}\Phi(X_1{}^tY_0) &= U_1{}^tV_1\\ \Phi(X_2{}^tY_0) &= U_2{}^tV_1\end{cases}$$

En considérant $\Phi\big((X_1+X_2)^tY_0\big)$, montrer que V_1 et V_2 sont liés.

Prouver alors que l'on peut choisir un élément fixe $V_0\neq 0$ dans E tel que, pour tout $X\in E$, il existe $U\in E$ vérifiant

$$\Phi(X^tY_0)=U^tV_0.$$

c) Toujours avec l'hypothèse (H_1), établir l'existence d'une matrice inversible $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $X\in E$,

$$\Phi(X^tY_0)=AX^tV_0.$$

II.3 L'élément $Y_0\neq 0$ étant toujours fixé dans E, on fait l'hypothèse suivante :

$$(H_2)\quad \forall(X_1,X_2)\in(E\setminus\{0\})^2,\quad \exists(U_1,U_2)\in E^2 \text{ liée},\quad \exists(V_1,V_2)\in E^2 \quad \text{tels que } \begin{cases}\Phi(X_1{}^tY_0) &= U_1{}^tV_1\\ \Phi(X_2{}^tY_0) &= U_2{}^tV_1\end{cases}$$

Montrer que l'on peut choisir un élément fixe $U_0\in E$ tel que, pour tout $X\in E$, il existe $V\in E$ vérifiant

$$\Phi(X^tY_0)=U_0{}^tV.$$

et en déduire qu'il existe une matrice inversible $B\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $X\in E$,

$$\Phi(X^tY_0)=U_0{}^tXB$$

II.4 Afin de confronter entre elles les hypothèses (H_1) et H_2, on fait l'hypothèse suivante

$$(H)\ \left|\ \begin{array}{c}\exists(Y_0,Y_0')\in(E\setminus\{0\})^2,\quad \exists(A,B)\in GL_n(\mathbb{C})^2,\quad \exists(U_0,V_0)\in E^2 \text{ tels que}\\ \forall X\in E,\quad \Phi(X^tY_0)=AX^tV_0 \quad\text{et}\quad \Phi(X^tY_0')=U_0{}^tXB\end{array}\right.$$

a) Montrer que Y_0' et Y_0 sont linéairement indépendants (on pourra raisonner par l'absurde).

b) En choisissant $X=A^{-1}U_0$ et X' linéairement indépendant de X, étudier le rang de $\Phi(X^tY_0+X'^tY_0')$, et en conclure que l'hypothèse (H) est inacceptable.

c) Que peut-on en déduire concernant les hypothèses (H_1) et (H_2) ?

II.5 On suppose dans cette question que l'hypothèse (H_1) est vérifiée. D'après la question II.2.c, il existe un élément non nul $Y_0\in E$, une matrice inversible $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ et un élément $V_0\in E$ tels que

$$\forall X\in E,\quad \Phi(X^tY_0)=AX^tV_0.$$

a) Soit Y un élément de E linéairement indépendant de Y_0. Établir l'existence d'une matrice inversible A_1 et d'un élément $V\in E$ non colinéaire à V_0 tels que l'on ait

$$\Phi(X^tY)=A_1X^tV$$

pour tout $X\in E$. Pour Y donné, le choix de A_1 est-il unique ?

b) Montrer que l'on peut choisir $A_1=A$. En déduire qu'il existe une matrice inversible $B\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout couple $(X,Y)\in E^2$,

$$\Phi(X^tY)=AX^tYB$$

c) Donner, pour toute matrice $M\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, la valeur explicite de $\Phi(M)$.

II.6 On suppose dans cette question que l'hypothèse (H_2) est vérifiée. D'après la question II.3, il existe un élément Y_0 non nul dans E, une matrice inversible $B\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ et un élément $U_0\in E$ tels que l'on ait

$$\Phi(X^tY_0)=U_0{}^tXB$$

pour tout $X\in E$.

a) Vérifier que l'application Φ' définie sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ par $\Phi'(M)={}^t[\Phi(M)]$ est un endomorphisme qui conserve le rang.

b) En déduire la valeur explicite de $\Phi(M)$ pour toute $M\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

II.7 Conclure : quels sont les endomorphismes de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le rang ?

Troisième partie

Dans toute cette partie, Φ désigne un endomorphisme de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le déterminant, c'est-à-dire tel que

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det \Phi(\mathrm{M}) = \det \mathrm{M}$$

Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, r le rang de M, $\mathrm{J}_r = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (où I_r désigne la matrice identité d'ordre r), et $\mathrm{K}_r = \mathrm{I} - \mathrm{J}_r$.
On écrit $\mathrm{M} = \mathrm{P}\mathrm{J}_r\mathrm{Q}$ avec P, Q inversibles, et on note $\mathrm{N} = \mathrm{P}\mathrm{K}_r\mathrm{Q}$.

III.1 Montrer que $\det(\lambda \mathrm{M} + \mathrm{N})$ est un monôme en λ dont on précisera le degré.

III.2 Soit s le rang de $\Phi(\mathrm{M})$. Montrer que $\det\big(\lambda\Phi(\mathrm{M}) + \Phi(\mathrm{N})\big)$ est un polynôme en λ dont on comparera le degré à s.
En déduire $r \leqslant s$, puis en déduire que Φ est bijective.

III.3 Montrer que Φ conserve le rang.

III.4 Conclure : quels sont les endomorphismes de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le déterminant ?

Quatrième partie

Dans toute cette partie, Φ désigne un endomorphisme de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le spectre, c'est-à-dire tel que

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{Sp}\,\Phi(\mathrm{M}) = \mathrm{Sp}\,\mathrm{M}$$

IV.1 Dire pourquoi Φ conserve le rang et le déterminant.

IV.2 En posant $\mathrm{G} = \big[\Phi(\mathrm{I})\big]^{-1}$, comparer $\det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{G}\Phi(\mathrm{M}))$ à $\det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{M})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et toute matrice $\mathrm{M} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.
En déduire l'égalité : $\mathrm{Sp}(\mathrm{GM}) = \mathrm{Sp}\,\mathrm{M}$.

IV.3 Montrer que $\mathrm{G} = \mathrm{I}$.

IV.4 Conclure : quels sont les endomorphismes de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le spectre ?

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆