DM N°9 (pour le 17/02/2012)

On se propose d'étudier quelques propriétés des applications linéaires inversibles de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ ainsi que de leurs matrices.

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est supposé muni de sa base canonique ordonnée $\mathscr{B}_n = (e_1, \ldots, e_n)$, $e_i = (\delta_1^i, \ldots, \delta_n^i)$, δ_i^j désignant le symbole de Kronecker ($\delta_i^j = 1$ si $i = j$ et $\delta_i^j = 0$ si $i \neq j$).

On choisit sur $\mathbb{R}^n$ la norme euclidienne usuelle : $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$, avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

$\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n.

Alors, $\mathscr{M} : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : « $\mathscr{M}(f)$ est la matrice de f relativement à $\mathscr{B}_n$ », est un isomorphisme d'algèbre de $(\mathscr{L}(\mathbb{R}^n), +, ., \circ)$ sur $\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), +, ., \times\big)$, où $+$ désigne l'addition, $.$ désigne la multiplication par les scalaires, $\circ$ la composition des applications et $\times$ le produit matriciel.

Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $\|f\| = \sup\left\{\|f(x)\|_2 : \|x\|_2 \leqslant 1\right\}$ sera la norme subordonnée de f associée à $\|\ \|_2$, on notera aussi $\|\ \|$ la norme transportée sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $\mathscr{M}$, c'est-à-dire que $\|\mathrm{M}\| = \left\|\mathscr{M}^{-1}(\mathrm{M})\right\|$ $(\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$.

On rappelle que $((\mathscr{L}(\mathbb{R}^n), +, ., \circ), \|\ \|)$ et $\big((\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), +, ., \times), \|\ \|\big)$ sont des **algèbres de Banach unitaires**,[1] et que $\mathscr{M}$ est un isomorphisme isométrique[2] de la première algèbre sur la seconde : de ce fait toutes les propriétés établies dans le texte sur $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ se transposent immédiatement sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On notera I_n l'élément neutre de $(\mathscr{L}(\mathbb{R}^n), \circ)$ et J_n celui de $\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \times\big)$[3].

On pose $\det : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Det} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, où $\det(f)$ désigne le déterminant de f et $\mathrm{Det}(\mathrm{M}) = \det\left(\mathscr{M}^{-1}(\mathrm{M})\right)$ est le déterminant de M.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{M} = (\alpha_{i,j})$ signifie que $\alpha_{i,j}$ est le réel situé sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne de M, $\alpha_{i,j}$ est une « entrée » de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de M.

Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ on définit $\mathrm{L}_k : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ par $\mathrm{L}_k(\mathrm{M}) = \left(\alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,n}\right)$ si $\mathrm{M} = (\alpha_{i,j})$.

Si $\mathrm{L}_k(\mathrm{M}) \neq (0, \ldots, 0)$ on notera $p(k) = \min\left\{j \in \{1, \ldots, n\} : \alpha_{k,j} \neq 0\right\}$ et on dira que $\alpha_{k,p(k)}$ est « l'entrée principale » de $\mathrm{L}_k(\mathrm{M})$.

Dans tout le problème, on appelle « groupe linéaire d'ordre n », et on note $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble suivant : $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) : (\exists g)\left(\left(g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)\right) \text{ et } \left(g \circ f = \mathrm{I}_n\right)\right)\right\}$, (i.e. $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si f possède une « inverse linéaire à gauche ») ; de même $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}(\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n))$ sera le « groupe matriciel d'ordre n ».

La partie II est autonome ; la partie III peut se traiter en admettant II.3.4.

I. On se propose, dans cette partie, d'établir les résultats de base relatifs aux groupes linéaires et matriciels.

1) Montrer que $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si f est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$, (donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est autre que l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n) et que $(\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n), \circ)$ et $\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times\big)$ sont bien des groupes ; si $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ et si $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on notera f^{-1} et M^{-1} leurs inverses dans ces groupes.

2) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, on définit $(f^p)_{p \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ par $f^0 = \mathrm{I}_n$, $f^{p+1} = f^p \circ f$.

---

1. Une algèbre de Banach $(\mathrm{A}, +, \cdot, \times, \|\ \|)$ sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, munie d'une norme telle que $\forall (a,b) \in \mathrm{A}^2, \|a \times b\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$ et telle que l'espace vectoriel normé sous-jacent soit en outre un espace de Banach (i.e. un espace vectoriel normé complet). Elle est de plus dite unitaire si son élément neutre 1_{A} pour $\times$ vérifie $\|1_{\mathrm{A}}\| = 1$

2. c'est-à-dire qui conserve la norme, soit $\|\mathscr{M}(\mathrm{M})\| = \|\mathrm{M}\|$

3. Des notations pour le moins curieuses...

2.1. Démontrer que si $\left\|f\right\| < 1$, alors $\mathrm{I}_n - f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ et $(\mathrm{I}_n - f)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} f^i$.

2.2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soit $(f_1,\dots,f_p) \in (\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))^p$ montrer que : $\left\|f_1 \circ \dots \circ f_p\right\| \leqslant \left\|f_1\right\| \dots \left\|f_p\right\|$ et en déduire que $(f_1,\dots,f_p) \mapsto f_1 \circ \dots \circ f_p$ est continue (donc $\left(\mathrm{M}_1,\dots,\mathrm{M}_p\right) \mapsto \mathrm{M}_1 \times \dots \times \mathrm{M}_p$ est continue avec $\left(\mathrm{M}_1,\dots,\mathrm{M}_p\right) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^p$.

2.3. **a)** Soit $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, montrer que si $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\left\|g\right\| < \left\|f^{-1}\right\|^{-1}$, on a : $f + g \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ (on aura intérêt à écrire : $f + g = f \circ \left(\mathrm{I}_n + f^{-1} \circ g\right)$).

b) Montrer que : $(f+g)^{-1} - f^{-1} = \left(\left(\mathrm{I}_n + f^{-1} \circ g\right)^{-1} - \mathrm{I}_n\right) \circ f^{-1}$ et en déduire que $f \mapsto f^{-1}$ est continue (donc $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^{-1}$ est continue).

3) **3.1.** Montrer que Det est une application continue ; en déduire qu'il en est de même pour det.

3.2. On définit $\mathrm{GL}_+(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{GL}_-(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{GL}_{n+}(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_{n-}(\mathbb{R})$ comme suit :

$\mathrm{GL}_+(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) : \det(f) > 0\right\}$, $\quad \mathrm{GL}_-(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) : 0 > \det(f)\right\}$

$\mathrm{GL}_{n+}(\mathbb{R}^n) = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}) : \mathrm{Det}(\mathrm{M}) > 0\}$, $\quad \mathrm{GL}_{n-}(\mathbb{R}^n) = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}) : 0 > \mathrm{Det}(\mathrm{M})\}$.

Montrer que $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{GL}_+(\mathbb{R}^n) \cup \mathrm{GL}_-(\mathbb{R}^n)$ (donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_{n+}(\mathbb{R}) \cup \mathrm{GL}_{n-}(\mathbb{R})$).

Montrer que $\mathrm{GL}_+(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{GL}_-(\mathbb{R}^n)$ sont ouverts (donc $\mathrm{GL}_{n+}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_{n-}(\mathbb{R})$ sont ouverts).

4) Montrer que $\left(\mathrm{GL}_+(\mathbb{R}^n), \circ\right)$ et $\left(\mathrm{GL}_{n+}(\mathbb{R}), \times\right)$ sont des sous-groupes de $(\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n), \circ)$ et $\left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times\right)$. Qu'en est-il de $\mathrm{GL}_-(\mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{GL}_{n-}(\mathbb{R})$?

5) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, on définit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $u(t) = \det(f + t.\mathrm{I}_n)$.

5.1. Montrer que u est une fonction polynomiale de degré n.

5.2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ tel que l'on ait : $\{f + t.\mathrm{I}_n : t \in]0, \alpha[\} \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. En déduire que $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ (donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

II. Dans cette partie, on montre comment on peut calculer l'inverse d'un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en utilisant des « transformations élémentaires » sur les lignes des matrices.

Définitions et notations :

1- Soit $\mathrm{M} = (\alpha_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$; on dira que M est « L - réduite » si et seulement si :

- soit M est la matrice nulle (notée $0_{\mathscr{M}_n}$),
- soit, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$ tel que $\mathrm{L}_k(\mathrm{M}) \neq (0,\dots,0)$ alors $\alpha_{k,p(k)} = 1$ et $\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{j,p(k)}\right| = 1$ (où $\alpha_{k,p(k)}$ est « l'entrée principale » de $\mathrm{L}_k(\mathrm{M})$).

2- $$\mathscr{E}l_1(n) = \bigcup_{(k,\lambda)\in\{1,\dots,n\}\times\mathbb{R}^*} \left\{\mathrm{A}_{1,k,\lambda}\right\} \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ où } \mathrm{A}_{1,k,\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \lambda & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

λ étant à la $k^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne.

autrement dit : $(\mathrm{L}_i(\mathrm{A}_{1,k,\lambda}) = e_i)$ si $i \neq k$, $\mathrm{L}_k(\mathrm{A}_{1,k,\lambda}) = \lambda e_k$.

3- $\mathscr{E}l_2(n) = \displaystyle\bigcup_{((k,p),\lambda)\in\left(\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}}(\{i\}\times(\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}))\right)\in\mathbb{R}} \left\{\mathrm{A}_{2,k,p,\lambda}\right\} \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $\mathrm{A}_{2,k,\lambda}$ s'écrit :

$$\mathrm{A}_{2,k,p,\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & & \\ \vdots & 0 & 1 & & & & & & & \\ \vdots & & 0 & \ddots & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & & \\ \vdots & & 0 & & & \ddots & & & & \\ \vdots & \dots & \lambda & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & & 0 & & & & & \ddots & & \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

λ étant à la $k^{\text{ième}}$ ligne et la $p^{\text{ième}}$ colonne.
autrement dit : $(\mathrm{L}_i(\mathrm{A}_{2,k,p,\lambda}) = e_i)$ si $i \neq k$, $\mathrm{L}_k(\mathrm{A}_{2,k,p,\lambda}) = e_k + \lambda e_p$

4- $\mathscr{E}l_3(n) = \displaystyle\bigcup_{(k,p)\in\{1,\dots,n\}^2} \left\{\mathrm{A}_{3,k,p}\right\} \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{A}_{3,k,p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & & 0 \\ & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

autrement dit : $\mathrm{L}_i(\mathrm{A}_{3,k,p}) = e_i$ si $i \notin \{k,p\}$, $\mathrm{L}_k(\mathrm{A}_{3,k,p}) = e_p$, $\mathrm{L}_p(\mathrm{A}_{3,k,p}) = e_k$.

On définit alors $\mathscr{E}l(n) = \displaystyle\bigcup_{i\in\{1,2,3\}} \mathscr{E}l_i(n)$, un élément de $\mathscr{E}l(n)$ s'appelle une matrice élémentaire d'ordre n, de type i s'il appartient à $\mathscr{E}l_i(n)$

5- On appelle opération élémentaire de type 1, 2 ou 3 sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $\mathscr{T}_{1,k,\lambda}$, $\mathscr{T}_{2,k,p,\lambda}$, $\mathscr{T}_{3,k,p}$, $\left((k,p)\in\{1,\dots,n\}^2, \lambda\in\mathbb{R}\right)$ toute application (de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) du type :

$\mathscr{T}_{1,k,\lambda}(\mathrm{M}) = \mathrm{A}_{1,k,\lambda} \times \mathrm{M}$; $\mathscr{T}_{2,k,p,\lambda}(\mathrm{M}) = \mathrm{A}_{2,k,p,\lambda} \times \mathrm{M}$; $\mathscr{T}_{3,k,p}(\mathrm{M}) = \mathrm{A}_{3,k,p} \times \mathrm{M}$

avec $\mathrm{A}_{1,k,\lambda} \in \mathscr{E}l_1(n)$, $\mathrm{A}_{2,k,p,\lambda} \in \mathscr{E}l_2(n)$ et $\mathrm{A}_{3,k,p} \in \mathscr{E}l_3(n)$.

On définit alors :

$\mathscr{O}_1(n) = \left\{\mathscr{T}_{1,k,\lambda} : \mathrm{A}_{1,k,\lambda} \in \mathscr{E}l_1(n)\right\}$, $\mathscr{O}_2(n) = \left\{\mathscr{T}_{1,k,p,\lambda} : \mathrm{A}_{2,k,p,\lambda} \in \mathscr{E}l_2(n)\right\}$,
et $\mathscr{O}_3(n) = \left\{\mathscr{T}_{3,k,p} : \mathrm{A}_{3,k,p} \in \mathscr{E}l_3(n)\right\}$;

$\mathscr{O}(n) = \displaystyle\bigcup_{i\in\{1,2,3\}} \mathscr{O}_i(n)$ est l'ensemble des opérations élémentaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

6- Soit $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$, on dira que N est « L - équivalente » à M s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $\left(\mathscr{T}^{(1)},\dots,\mathscr{T}^{(q)}\right) \in (\mathscr{O}(n))^q$ tels que : $\mathrm{N} = \left(\mathscr{T}^{(1)} \circ \mathscr{T}^{(2)} \circ \dots \circ \mathscr{T}^{(q)}\right)(\mathrm{M})$.

Questions :

1) Soit $\mathrm{M} = (\alpha_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\mathscr{T}_{1,k,\lambda}(\mathrm{M})$, $\mathscr{T}_{2,k,p,\lambda}(\mathrm{M})$, $\mathscr{T}_{3,k,p}(\mathrm{M})$ et donner une interprétation simple des opérations élémentaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Calculer $\mathrm{Det}(A_{1,k,\lambda})$, $\mathrm{Det}(A_{2,k,p,\lambda})$, $\mathrm{Det}(A_{3,k,p})$ et montrer que $\mathscr{E}l(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Calculer $\left(A_{1,k,\lambda}\right)^{-1}$, $\left(A_{2,k,p,\lambda}\right)^{-1}$, $\left(A_{3,k,p}\right)^{-1}$ et en déduire que la « L - équivalence » est bien une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et si $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est « L - équivalente » à M, alors $N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

3) On se propose de montrer que tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est « L - équivalent » à une matrice « L - réduite » et ce, en utilisant uniquement des opérations élémentaires de type 1 ou 2.

Soit $M = \left(\alpha_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (on suppose que $M \neq 0_{\mathscr{M}_n}$), on suppose que pour k donné, $k \in \{1,\ldots,n\}$, on a pu trouver $\left(\mathscr{T}^{(1)},\ldots,\mathscr{T}^{(q(k))}\right) \in \left(\mathscr{O}_1(n) \cup \mathscr{O}_2(n)\right)^{q(k)}$ tel que $M_{(k)} = \left(\mathscr{T}^{(1)} \circ \ldots \circ \mathscr{T}^{(q(k))}\right)(M) = \left(\alpha_{i,j}^{(k)}\right)$ vérifie la propriété $(\mathrm{P}(k))$.

$(\mathrm{P}(k))$: pour tout $i \in \{1,\ldots,k\}$, soit $L_i(M_{(k)}) = (0,\ldots,0)$, soit $\alpha_{i,p_{(i)}}^{(k)} = 1$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{j,p_{(i)}}^{(k)}\right| = 1$ ($(\alpha_{i,p_{(i)}}^{(k)})$ étant « l'entrée principale » de $L_i(M_{(k)})$.

Si pour tout $i \in \{k+1,\ldots,n\}$ on a $L_i(M_{(k)}) = (0,\ldots,0)$ alors $M_{(k)}$ est « L - réduite », de même si $k = n$; de plus M et $M_{(k)}$ sont « L - équivalentes » par des opérations élémentaires de type 1 ou 2. Si $M_{(k)}$ est « L - réduite » c'est fini, sinon soit $m(k) = \min\left\{i \in \{k+1,\ldots,n\} : L_i\left(M_{(k)}\right) \neq (0,\ldots,0)\right\}$.

3.1. Montrer qu'il existe $\mathscr{T}_{1,m(k),\lambda} \in \mathscr{O}_1(n)$ tel que l'on ait : $\mathscr{T}_{1,m(k),\lambda}\left(M_{(k)}\right) = M'_{(k)} = \left(\alpha'^{\,k}_{i,j}\right)$ vérifie $(\mathrm{P}(k))$ et $\alpha'^{(k)}_{m(k),p(m(k))} = 1$ (où $\alpha'^{(k)}_{m(k),p(m(k))}$ est « l'entrée principale » de $L_{m(k)}(M'_{(k)})$).

3.2. Soit $\{i_1,\ldots,i_{n-1}\} = \{1,\ldots,n\} \setminus \{m(k)\}$, montrer qu'il existe $\left(\mathscr{T}_{2,i_j,m(k),\lambda_{i_j}}\right)_{j \in \{1,\ldots,i_{n-1}\}}$ tel que l'on ait : $M_{(m(k))} = \mathscr{T}_{2,i_1,m(k),\lambda_{i_1}} \circ \ldots \mathscr{T}_{2,i_{n-1},m(k),\lambda_{i_{n-1}}}(M'_{(k)})$ vérifie $(\mathrm{P}(m(k)))$. Montrer que ceci établit le résultat énoncé au début du II.3.

3.3. On s'intéresse à l'algorithme permettant de calculer les entrées de $M_{(m(k))}$ à partir de la donnée de celles de $M_{(k)}$. On pose, pour simplifier l'écriture [4], $M_{(k)} = (a_{i,j})$, $m(k) = m$, $M_{(m(k))} = (b_{i,j})$; expliciter les formules permettant le calcul des $b_{i,j}$ à partir des $a_{i,j}$.

3.4. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que, si M est « L - réduite », il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $\left(\mathscr{T}_{3,k_i,p_i}\right)_{i \in \{1,\ldots,q\}} \in \left(\mathscr{O}_3(n)\right)^q$ tels que $\left(\mathscr{T}_{3,k_1,p_1} \circ \mathscr{T}_{3,k_2,p_2} \circ \mathscr{T}_{3,k_q,p_q}\right)(M) = J_n$. Montrer que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si M est un produit d'éléments de $\mathscr{E}l(n)$.

III. Nous allons montrer que $\mathrm{GL}_{n+}(\mathbb{R}), \mathrm{GL}_{n-}(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_+(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{GL}_+(\mathbb{R}^n)$ sont connexes par arcs [5]. Il s'agit d'un résultat important et non évident, bien qu'élémentaire [6].

A. Soit $M \in \mathrm{GL}_{n+}(\mathbb{R})$, d'après II.3.4, il existe $(B_i)_{i \in \{1,\ldots,m\}} \in (\mathscr{E}l(n))^m$ tel que l'on ait : $M = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$.

1) Montrer que $\left\{i \in \{1,\ldots,m\} : B_i \in \mathrm{GL}_{n-}(\mathbb{R})\right\}$ possède un nombre pair d'éléments.

2) **2.1.** Soit $A_{1,k,\lambda} \in \mathscr{E}l_1(n) \cap \mathrm{GL}_{n+}(\mathbb{R})$, soit $\varphi : [0,1] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(t) = A_{1,k,(1-t)\lambda+t}$.
Montrer que φ est continue, que $\varphi([0,1]) \subset \mathrm{GL}_{n+}(\mathbb{R})$ et calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$.

2.2. Soit $A_{1,k,\lambda} \in \mathscr{E}l_1(n) \cap \mathrm{GL}_{n-}(\mathbb{R})$, soit $\psi : [0,1] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \psi(t) = A_{1,k,(1-t)\lambda-t}$.
Montrer que ψ est continue, que $\psi([0,1]) \subset \mathrm{GL}_{n-}(\mathbb{R})$ et calculer $\psi(0)$ et $\psi(1)$.

3) Soit $A_{2,k,p\lambda} \in \mathscr{E}l_2(n)$, soit $\chi : [0,1] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \chi(t) = A_{2,k,p,(1-t)\lambda}$.
Montrer que χ est continue, que $\chi([0,1]) \subset \mathrm{GL}_{n+}(\mathbb{R})$, et calculer $\chi(0)$ et $\chi(1)$.

4. Il est temps !..

5. Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite connexe par arcs si et seulement si pour tous $x, y \in A$, il existe un chemin continu qui relie x à y, c'est-à-dire une application continue $\gamma : [0,1] \to E$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

6. non évident, mais cependant élémentaire ? ? ?

4) Soit $A_{3,k,p} \in \mathscr{E}l_3(n)$, $(k \neq p)$, soit $\omega : [0,1] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$L_i(\omega(t)) = e_i \text{ si } i \notin \{k,p\}$$
$$L_k(\omega(t)) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).e_k + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).e_p$$
$$L_p(\omega(t)) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).e_p + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).e_k$$

Montrer que ω est continue, que $\omega([0,1]) \subset GL_{n-}(\mathbb{R})$, et calculer $\omega(0)$ et $\omega(1)$.

5) En utilisant ce qui précède, montrer qu'il existe σ, $\sigma : [0,1] \to GL_{n+}(\mathbb{R})$, σ continue, telle que l'on ait : $\sigma(0) = M$ et $L_i(\sigma(1)) = \varepsilon_i.e_i$, $\varepsilon_i \in \{-1,1\}$ et $\{i \in \{1,\dots,n\} : \varepsilon_i = -1\}$ possède un nombre pair d'éléments.

6) Soit $\{p,k\} \subset \{1,\dots,n\}$, $p \neq k$, soit $N_{(p,k)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec :

$$L_i\left(N_{(p,k)}\right) = e_i \text{ si } i \notin \{p,k\}$$
$$L_k\left(N_{(p,k)}\right) = -e_k,$$
$$L_p\left(M_{(p,k)}\right) = -e_p.$$

Soit $\rho : [0,1] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,avec :

$$L_i\left(\rho(t)\right) = e_i \text{ si } i \notin \{p,k\}$$
$$L_k\left(\rho(t)\right) = -\cos(\pi t).e_k + \sin(\pi t).e_p$$
$$L_p\left(\rho(t)\right) = -\cos(\pi t).e_p - \sin(\pi t).e_k$$

Montrer que ρ est continue, que $\rho([0,1]) \in GL_{n+}(\mathbb{R})$, et calculer $\rho(0)$ et $\rho(1)$.

7) En utilisant III.A.5 et III.A.6, montrer qu'il existe μ, $\mu : [0,1] \to GL_{n+}(\mathbb{R})$, μ continue, telle que l'on ait $\mu(0) = M$, $\mu(1) = J_n$. Déduire de ceci que $GL_{n+}(\mathbb{R})$ est connexe par arcs (donc $GL_+(R^n)$ est connexe par arcs).

B. Soit $M \in GL_{n-}(\mathbb{R})$, montrer, en s'inspirant de III.A qu'il existe ν, $\nu : [0,1] \to GL_{n-}(\mathbb{R})$, ν continue, telle que l'on ait $\nu(0) = M$, $\nu(1) = A_{1,1,-1}$.

Déduire de ceci que $GL_{n-}(\mathbb{R})$ est connexe par arcs (donc $GL_-(\mathbb{R}^n)$ est connexe par arcs).

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆