DM n°7 (pour le 07/12/01)

Notations :

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1.

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et p colonnes.

On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ que l'on supposera munis de leurs produits scalaires canoniques notés respectivement $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_n$ et $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_p$.

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement $\| \cdot \|_n$ et $\| \cdot \|_p$.

On notera $(E_i)_{1\leq i\leq p}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $(F_j)_{1\leq j\leq n}$ celle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.

$0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^{\mathrm{t}}A$ désigne la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

$\operatorname{Ker} A$ est le noyau de A défini par

$$\operatorname{Ker} A = \{\, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0 \,\}$$

$\operatorname{Im} A$ est l'image de A définie par

$$\operatorname{Im} A = \{\, AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \,\}$$

Enfin, on adopte la notation $F^{\perp}$ pour désigner l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien.

PARTIE I :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

I.1. Montrer que ${}^{\mathrm{t}}AA$ est nulle si et seulement si A est nulle.

Dans toute la suite du problème A sera supposée non nulle.

I.2. Montrer que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A\,{}^{\mathrm{t}}A$ sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.

I.3.a) X, Y désignant deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, exprimer le produit scalaire $\langle X \mid Y \rangle_n$ sous la forme d'un produit matriciel.

b) Si W est un vecteur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$ associé à la valeur propre λ, exprimer $\| AW \|_n^2$ en fonction de λ et $\| W \|_p$.

c) En déduire que les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ sont réelles, positives ou nulles.

I.4.a) Pour x réel, calculer les produits matriciels par bloc suivants :

$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}$$

b) En déduire que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité.

c) En déduire également que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ ont même rang.

I.5. Montrer que si $n > p$, 0 est valeur propre de $A{}^{\mathrm{t}}A$ et que si $n < p$, 0 est valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$.

I.6. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$, chaque valeur propre apparaissant dans cette liste un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et on pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i élément de $\{1, 2, \ldots, p\}$.
Les réels μ_i sont appelés valeurs singulières de A.
On suppose les réels λ_i ordonnés tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$.

a) Montrer que λ_1 est non nul.

On définit alors un unique entier naturel r appartenant à $\{1, 2, \ldots, p\}$ comme suit : si toutes les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ sont non nulles, $r = p$, sinon r est tel que pour tout $i \leq r$, $\lambda_i > 0$ et pour tout $i > r$, $\lambda_i = 0$.

Soit $(V_1, V_2, \ldots, V_p)$ une base orthonormale de vecteurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$; $V_1, V_2, \ldots, V_r$ désignent les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et lorsque r est strictement inférieur à p, $V_{r+1}, \ldots, V_p$ désignent les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

b) Montrer que $r \leq n$ et que la dimension de $\operatorname{Ker} A{}^{\mathrm{t}}A$ est égale à $n - r$.

Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on pose $U_i = \dfrac{1}{\mu_i} AV_i$ et si $n > r$, on désigne par $(U_{r+1}, \ldots, U_n)$ une base orthonormale de $\operatorname{Ker} A{}^{\mathrm{t}}A$.

c) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $AV_i = \mu_i U_i$ et que si r est strictement inférieur à p, pour tout $i \in \{\, r+1, \ldots, p\,\}$, $AV_i = 0$.

d) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, ${}^{\mathrm{t}}AU_i = \mu_i V_i$.

e) Montrer que si $n > r$, pour tout $i \in \{\, r+1, \ldots, n\,\}$, ${}^{\mathrm{t}}AU_i = 0$.

f) En déduire que le système de vecteurs $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ constitue une base orthonormale de vecteurs propres de $A{}^{\mathrm{t}}A$ et préciser la valeur propre associée à chaque vecteur U_i.

I.7. On note V la matrice carrée réelle d'ordre p dont le $\mathrm{i}^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur V_i, U la matrice carrée réelle d'ordre n dont le $\mathrm{j}^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur U_j et $({}^{\mathrm{t}}UAV)_{i,j}$ l'élément de la $\mathrm{i}^{\text{ème}}$ ligne, $\mathrm{j}^{\text{ème}}$ colonne de la matrice ${}^{\mathrm{t}}UAV$.

a) Montrer que :

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, p\},\ ({}^{\mathrm{t}}UAV)_{i,j} = \mu_j \delta_{i,j} \quad \text{où} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

b) On note Δ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments $\Delta_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \ldots, \Delta_{rr}$ respectivement égaux à $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$. Montrer que $A = U\Delta{}^{\mathrm{t}}V$.

La factorisation de A ainsi obtenue est dite décomposition de A en valeurs singulières.

c) Trouver une décomposition en valeurs singulières de chacune des matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I.8. Montrer que le rang de A est égal à r.

I.9.a) Montrer que $V = \sum_{i=1}^{p} V_i {}^{\mathrm{t}}E_i$.

b) En déduire :

$$A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i {}^{\mathrm{t}}V_i \quad , \quad {}^{\mathrm{t}}AA = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i V_i {}^{\mathrm{t}}V_i \quad , \quad A {}^{\mathrm{t}}A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i {}^{\mathrm{t}}U_i$$

c) Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} {}^{\mathrm{t}}A$, $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} {}^{\mathrm{t}}A$.

d) Montrer que $\operatorname{Ker} {}^{\mathrm{t}}AA = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} A {}^{\mathrm{t}}A = \operatorname{Ker} {}^{\mathrm{t}}A$.

PARTIE II :

Avec les notations de la partie **I**, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admettant une décomposition en valeurs singulières $A = U \Delta {}^{\mathrm{t}}V$, on appelle Δ^+ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments $\Delta^+_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta^+_{11}, \Delta^+_{22}, \ldots, \Delta^+_{rr}$ respectivement égaux à $\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \ldots, \frac{1}{\mu_r}$ et on pose $A^+ = V(\Delta^+) {}^{\mathrm{t}}U$.

Δ^+ (resp. A^+) est appelée pseudo-inverse de Δ (resp. de A). A priori, la matrice A^+ ainsi définie dépend de la décomposition en valeurs singulières choisie pour la matrice A, mais il sera montré à la question **II.9** *qu'il n'en est rien et que A^+ est uniquement déterminée à partir de A.*

II.1. Déterminer les matrices A_0^+, $A_0 A_0^+$, $A_0^+ A_0$, $A_0 A_0^+ A_0$ et $A_0^+ A_0 A_0^+$.

II.2. Déterminer $(A_0^+)^+$.

II.3. Évaluer $\Delta^+ \Delta$ et $\Delta \Delta^+$.

II.4. Montrer que si A est une matrice carrée inversible ($n = p = r$), alors $A^+ = A^{-1}$.

II.5. Montrer que :

$$A^+ = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i} V_i {}^{\mathrm{t}}U_i \quad , \quad AA^+ = \sum_{i=1}^{r} U_i {}^{\mathrm{t}}U_i \quad , \quad A^+A = \sum_{i=1}^{r} V_i {}^{\mathrm{t}}V_i$$

II.6.a) Évaluer AA^+U_j pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et en déduire que AA^+ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\operatorname{Im} A$.

b) Montrer de même que A^+A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^p$ sur $(\operatorname{Ker} A)^\perp$.

II.7. Établir les identités suivantes :

$$AA^+ = {}^{\mathrm{t}}(AA^+) \quad , \quad A^+A = {}^{\mathrm{t}}(A^+A) \quad , \quad AA^+A = A \quad , \quad A^+AA^+ = A^+ \tag{1}$$

II.8. Établir les résultats suivants :

i) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} AA^+ \quad , \quad \operatorname{Ker} A^+ = \operatorname{Ker} AA^+ \quad , \quad \operatorname{Im} A^+ = \operatorname{Im} A^+A \quad , \quad \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^+A$.

ii) $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^+ \quad , \quad \mathbb{R}^p = \operatorname{Im} A^+ \oplus \operatorname{Ker} A$.

II.9. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$AB = {}^{\mathrm{t}}(AB) \quad , \quad BA = {}^{\mathrm{t}}(BA) \quad , \quad ABA = A \quad , \quad BAB = B$$

a) Montrer que B vérifie les identités suivantes :

i) $B = B\,{}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}B\,B$

ii) $A = A\,{}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}B = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A\,A$

iii) ${}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}A\,A\,B = B\,A\,{}^{\mathrm{t}}A$

b) En déduire que $B = A^+$, autrement dit que A^+ est l'unique matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ vérifiant les relations (1).

II.10. Montrer que $(A^+)^+ = A$ et ${}^{\mathrm{t}}(A^+) = ({}^{\mathrm{t}}A)^+$.

II.11. Évaluer $(A_0B_0)^+$ et $B_0^+A_0^+$. A-t-on l'égalité ?

II.12. Soit $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\overline{H} = A^+H$. On note $\mathrm{d}(H, \operatorname{Im} A)$ la distance de H au sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} A$.

a) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $AX - AA^+H$ et $H - AA^+H$ sont orthogonaux et en déduire :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \ , \quad \| A\overline{H} - H \|_n \leq \| AX - H \|_n$$

Que vaut alors $\mathrm{d}(H, \operatorname{Im} A)$?

b) Montrer que s'il existe $\tilde{H} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\| A\tilde{H} - H \|_n = \| A\overline{H} - H \|_n$ avec $\tilde{H} \neq \overline{H}$, alors $\| \overline{H} \|_p < \| \tilde{H} \|_p$.

c) Si $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, déterminer $\inf\limits_{X \in \mathbb{R}^2} \| A_0X - H \|_3$.
