

Corrigé du DM n°6
(adapté de ENSI 1984 et Navale 1989)

PARTIE I

1) a). $E_u(x)$ est un s.e.v. de E contenant x par définition

• $E_u(x)$ est stable par u car : $E_u(x) = \text{Vect}(\{u^p(x), p \in \mathbb{N}\}) \Rightarrow u(E_u(x)) = \text{Vect}(\{u^{p+1}(x), p \in \mathbb{N}\})$
d'où $u(E_u(x)) \subset E_u(x)$

• Si F est un s.e.v. de E contenant x et stable par u , alors $u(x) \in F$, puis par récurrence immédiate : $u^p(x) \in F$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Donc $\{u^p(x), p \in \mathbb{N}\} \subset F$ et, puisque F est un s.e.v., $\text{Vect}(\{u^p(x), p \in \mathbb{N}\}) \subset F$, soit $E_u(x) \subset F$.

Finalement, F est donc bien le plus petit s.e.v. de E stable par u et contenant x .

f) * Soit $A = \{x \in \mathbb{N}^*, (x, u(x), \dots, u^{x-1}(x)) \text{ libre}\}$. A est une partie de $\mathbb{N}$ tq :

- $A \neq \emptyset$ car $1 \in A$ car $x \neq 0 \Rightarrow \{x\}$ libre
- A est majorée par n car E est de dim. finie n (donc toute partie libre de E a moins de n éléments)

donc A possède un plus grand élément k .

* Par définition de k : $(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x))$ est libre et $(x, u(x), \dots, u^k(x))$ est liée. Donc $u^k(x) \in \text{Vect}(\{x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)\})$. Il est alors facile de

montrer par récurrence que : $\forall p \geq k, u^p(x) \in \text{Vect}(\{x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)\})$.

Ce résultat étant évidemment vrai aussi pour $p \leq k$, on a donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, u^p(x) \in \text{Vect}(\{x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)\})$$

$$\text{d'où } E_u(x) \subset \text{Vect}(\{x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)\}).$$

L'inclusion réciproque étant évidente, on a : $E_u(x) = \text{Vect}(\{x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)\})$.

Par suite, $\{x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)\}$ est une partie génératrice de $E_u(x)$; étant libre (par def. de k), c'est une base de $E_u(x)$

c) • si x est un vecteur propre de u , $x \neq 0$ et $\exists \lambda \in K$ tq $u(x) = \lambda x$.
On a donc $\{x, u(x)\}$ liée, d'où, avec les notations de la question précédente, $k=1$ et $\{x\}$ base de $E_u(x)$. Par suite, $\dim E_u(x) = 1$

• si $\dim E_u(x) = 1$, on a nécessairement $x \neq 0$ (car $x=0 \Rightarrow E_u(x) = \{0_E\}$).

On a aussi, d'après la question précédente, $k=1$ soit $\{x, u(x)\}$ liée. Il existe donc $\lambda \in K$ tq $u(x) = \lambda x$. Par suite, x est un vecteur propre de u .

2) a) Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in K^{n-1}$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors, en particulier,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(x_0) = 0_E, \text{ d'où } (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) = 0_{K^n} \text{ d'après l'hypothèse.}$$

Par suite, $\{I_E, u, \dots, u^{n-1}\}$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$

b) Soient $v, w \in C(u)$ tels que $v(x_0) = w_0$. Puisque u et v commutent, on a:

$$\forall k \in \mathbb{N}, u^k v = v u^k \text{ et, de même, } u^k w = w u^k \text{ (résultat du cours).}$$

$$\text{On a donc: } \forall k \in \mathbb{N} \quad v[u^k(x_0)] = u^k[v(x_0)] = u^k[w(x_0)] = w[u^k(x_0)]$$

Puisque v et w coïncident sur $\{x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\}$ qui est une base de E , on a donc $v=w$

c) Soit $v \in C(u)$. Puisque $\{x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\}$ est une base de E , il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in K^n$ tels que: $v(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(x_0)$, soit $v(x_0) = P(u)(x_0)$, en notant $P(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i$. Or v et $P(u)$ appartiennent à $C(u)$ donc, d'après la question précédente $v = P(u)$, soit $v \in \text{Vect}(\{I_E, u, \dots, u^{n-1}\})$.

Ainsi, $\{I_E, u, \dots, u^{n-1}\}$ est une partie génératrice de $C(u)$. Etant libre, c'en est une base.

d) La matrice de u dans la base $\{x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\}$ est la matrice, à cette base, du système de vecteurs $\{u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^n(x_0)\}$

$$\text{D'où } H(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & & & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{p) } \chi_u(x) = \det(H - xI_n) = \begin{vmatrix} -x & 0 & & & 0 & a_0 \\ 1 & -x & & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & & & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -x & a_{n-2} \\ & & & & 1 & a_{n-1} - x \end{vmatrix}$$

En faisant l'opération: $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + XL_3 + \dots + X^{n-1}L_n$, on obtient: (3)

$$\chi_u(X) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_0 + a_1X + \dots + (a_{n-1}-X)X^{n-1} \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-1} - X \end{vmatrix}$$

puis en développant selon la première ligne, on trouve:

$$\chi_u(X) = (-1)^{n+1} [a_0 + a_1X + \dots + a_{n-2}X^{n-2} + (a_{n-1}-X)X^{n-1}]$$

$$\text{soit } \chi_u(X) = (-1)^n [X^n - (a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1})]$$

γ) On a alors: $\chi_u(u) = (-1)^n [u^n - P(u)]$, où $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

Or $u^n(x_0) = P(u)(x_0)$, donc $\chi_u(u)(x_0) = 0$. Puisque $\chi_u(u) \in C(u)$, on déduit

de 2-b: $\chi_u(u) = 0$

3) a) χ_v divise χ_u : cf. cours!

Il existe donc $Q \in K[X]$ tel que $\chi_u = Q \cdot \chi_v$. D'où $\chi_u(u) = Q(u) \circ \chi_v(u)$.

Pour suite: $x \in \text{Ker } \chi_v(u) \Rightarrow \chi_v(u)(x) = 0 \Rightarrow Q(u)[\chi_v(u)(x)] = 0 \Rightarrow \chi_u(u)(x) = 0$,

soit $\text{Ker } \chi_v(u) \subset \text{Ker } \chi_u(u)$

b) $E_u(x)$ est stable par u ; soit donc $v = u|_{E_u(x)} \in \mathcal{L}(E_u(x))$. On sait qu'il existe k tel que $\{x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)\}$ soit une base de $E_u(x)$, i.e. $\{x, v(x), \dots, v^{k-1}(x)\}$ base de $E_u(x)$; cela signifie que $E_u(x) = E_v(x)$, i.e. v cyclique.

D'après 2., on en déduit: $\chi_v(v) = 0_{\mathcal{L}(E_u(x))}$ et, en particulier, $\chi_v(v)(x) = 0$

Or $\chi_v(v)(x) = \chi_v(u)(x)$ (car $v(x) = u(x)$!). Donc $x \in \text{Ker } \chi_v(u)$, d'où

$x \in \text{Ker } \chi_u(u)$, soit $\chi_u(u)(x) = 0$

c) On a donc démontré: $\forall x \in E - \{0\}, \chi_u(u)(x) = 0$. Cette relation étant évidemment encore vraie pour $x=0$, on a: $\chi_u(u) = 0$ (th. de Cayley-Hamilton)

PARTIE II

1) On sait que si u possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors u est diagonalisable, et $\dim E_{\lambda_i} = 1$ pour tout i . Donc, si $x_i \in E_{\lambda_i} - \{0\}$, $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E . Puisque, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x_i) = \lambda_i^k x_i$, on a, si $x = x_1 + \dots + x_n$

$$u^k(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k x_i$$

La matrice de la famille $\{x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\}$ dans la base $\{x_1, \dots, x_n\}$ est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice de Vandermonde ; puisque les λ_i sont distincts, cette matrice est inversible (cf. cours). Il en résulte que $\{x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\}$ est une base de E et, par suite, u est cyclique (car $E = E_u(x)$)

2) a) . Si v commute avec u , alors, $\forall \lambda \in K$, v laisse stable $\text{Ker}(u - \lambda I_E)$ (cf. cours : si u, v commutent et si $P, Q \in K[X]$, $\text{Ker } Q(u)$ est stable par $P(v)$!)

• Réciproquement, supposons que, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, v laisse stable $\text{Ker}(u - \lambda I_E)$. Alors : $\forall x \in \text{Ker}(u - \lambda I_E) : v u(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$
et $u v(x) = u[v(x)] = \lambda v(x)$
(car x et $v(x) \in E_\lambda(u)$)

d'où : $\forall x \in E_\lambda, u v(x) = v u(x)$.

Puisque u est diagonalisable, $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda$, donc : $\forall x \in E, u v(x) = v u(x)$

(cf. cours), i.e. $u v = v u$, et $v \in C(u)$

b) Considérons l'application $\varphi : C(u) \longrightarrow L(E_{\lambda_1}) \times \dots \times L(E_{\lambda_p})$
 $v \longmapsto (v_1, \dots, v_p)$

où v_i désigne l'endomorphisme de $L(E_{\lambda_i})$ induit par v sur E_{λ_i} .

- Cette définition a bien un sens d'après 2.a (E_{λ_i} stable par v si $v \in C(u)$)

- φ est, de façon évidente, linéaire.

- φ est injective car : $\varphi(v) = 0 \Rightarrow v_1 = \dots = v_p = 0$

$$\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall x_i \in E_{\lambda_i}, v_i(x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in E, v(x) = 0, \text{ soit } v = 0_{L(E)}$$

(car, u étant diagonalisable, pour tt $x \in E$, il existe $(x_1, \dots, x_p) \in E_{\lambda_1} \times \dots \times E_{\lambda_p}$

$$\text{t.q. } x = x_1 + \dots + x_p, \text{ d'où } v(x) = v(x_1) + \dots + v(x_p) = v_1(x_1) + \dots + v_p(x_p) = 0)$$

Ainsi $\text{Ker } \varphi = \{0\}$

- φ est surjective : soient $(v_1, \dots, v_p) \in L(E_{\lambda_1}) \times \dots \times L(E_{\lambda_p})$ et v l'endomorphisme de E t.q. $v|_{E_{\lambda_i}} = v_i$ (v existe et est unique d'après le cours). v laissant alors stable tous les sous-espaces propres de u , on a donc $v \in C(u)$ d'après 2.a, et $\varphi(v) = (v_1, \dots, v_p)$.

Ainsi, $C(u)$ est isomorphe à $\mathbb{L}(E_{\lambda_1}) \times \dots \times \mathbb{L}(E_{\lambda_p})$, d'où

$$\dim C(u) = \sum_{i=1}^p \dim(\mathbb{L}(E_{\lambda_i})) = \sum_{i=1}^p r_i^2$$

c) • $\prod_{i=1}^p (u - \lambda_i I_E) = 0$: cf. cours [en effet, u étant diagonalisable, son poly. minimal Π_u est scindé à racines simples ; puisque les racines de Π_u sont les λ_i , on a donc

$$\Pi_u = \prod_{i=1}^p (x - \lambda_i), \text{ et } \Pi_u(u) = 0_{\mathbb{L}(E)} \Rightarrow \prod_{i=1}^p (u - \lambda_i I_E) = 0_{\mathbb{L}(E)}$$

• En notant Π_u le polynôme $\prod_{i=1}^p (x - \lambda_i)$, on a donc $d := \Pi_u = p$, et $\Pi_u(u) = 0$.

Or, si la famille $\{I_E, u, \dots, u^{n-1}\}$ est libre, tant polynôme annulateur de u (non nul) est de degré $\geq n$ (car $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$)

Donc $d := \Pi_u \geq n$, soit $p \geq n$ d'où $p = n$: cela signifie que u a n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$.

d) $\alpha) \Rightarrow \beta)$ d'après A.2.a

$\beta) \Rightarrow \gamma)$ d'après B.2.c

$\gamma) \Rightarrow \delta)$: car, si u possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, on a :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, r_i = 1$ d'où $\dim C(u) = n$ d'après B.2.b

$\delta) \Rightarrow \alpha)$ Si $\dim(C(u)) = n$, alors $\sum_{i=1}^p r_i^2 = n$. D'autre part, $\sum_{i=1}^n r_i = n$ car u

est diagonalisable (donc $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i} \Rightarrow n = \sum \dim E_{\lambda_i} = \sum r_i$). On a donc

$$\sum_{i=1}^p r_i^2 = \sum_{i=1}^p r_i, \text{ avec } r_i \geq 1 \text{ pour tout } i. \text{ On en déduit : } \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, r_i = 1,$$

donc $p = n$ et u possède n valeurs propres distinctes (v.e. δ). D'après B.2, u est cyclique, d'où α .

3) a) Soit $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ une base adaptée à u . Dans cette base, la matrice de u s'écrit :

$$M(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

donc $M(u - \lambda I_E) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$. On peut alors extraire de cette matrice

la matrice carrée, d'ordre $n-1$: $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est inversible. D'après

un résultat du cours, on en déduit : $\text{rg}(u - \lambda I_E) \geq n-1$

b) . Si u admet n valeurs propres distinctes, u est diagonalisable (cf. cours)

. Réciproquement, si u est diagonalisable : soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$. D'après la question précédente et le théorème du rang, on a : $\dim E_\lambda = \dim \text{Ker}(u - \lambda I_E) \leq 1$.

Puisque $E_\lambda \neq \{0\}$ (car λ valeur propre!), on a : $\forall \lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda = 1$.

u étant diagonalisable, $\dim E_\lambda$ est égal à l'ordre de multiplicité de λ , i.e. que toutes les valeurs propres de u sont simples ; par suite, u admet bien n valeurs propres

4) . La première colonne de la matrice $P(A)$ est formée des coordonnées, dans la base $\{x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\}$ des vecteurs $P(u)(x_0)$

$$\text{On } P(u) = b_0 I_E + \dots + b_n u^{n-1}, \text{ et } P(u)(x_0) = b_0 x_0 + b_1 u(x_0) + \dots + b_n u^{n-1}(x_0)$$

donc ces coordonnées sont bien $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$

. Il en résulte que, pour tout polynôme P non nul appartenant à $K_{n-1}[X]$, on a $P(A) \neq 0$. Tout polynôme annulateur de A est donc nécessairement de degré supérieur ou égal à n , le polynôme minimal $^{(\Pi_A)}$ de A est donc aussi de degré $\geq n$.

Puisque $\Pi_A \mid \chi_A$ (où χ_A est le polynôme caractéristique de A), et que χ_A est de (d'après C.H.) degré n , de coeff. dominant $(-1)^n$, et Π_A normalisé, on a : $\chi_A = (-1)^n \Pi_A$

5) a) . Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$. Soit $B = AJ$ et $C = JA$. Alors, pour tout

$(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a :

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} j_k \text{ et } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{kj} i_k$$

$$\text{D'où : } AJ = JA \Leftrightarrow B = C \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \sum_k a_{ik} j_k = \sum_k a_{kj} i_k$$

$$\Leftrightarrow A \in \mathcal{M}.$$

Donc : A commute avec J ssi $A \in \mathcal{M}$, ce qui prouve que $\mathcal{M}$ est le commutant de A

[Rem : Cela prouve directement que $\mathcal{M}$ est une K -algèbre]

. d est une forme linéaire sur $\mathcal{M}$: trivial!

b) . $J = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$. On a donc $\text{rg}(J) = 1$, et $\dim \text{Ker } J = n-1$

(en "confondant" J et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont J est la matrice dans la base canonique). Par suite, 0 est valeur propre de J d'ordre de multiplicité $\geq n-1$.

D'autre part, n est évidemment valeur propre de J , car, si $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a

$J.e = n.e$. L'ordre de multiplicité de n est donc ≥ 1 .

Il en résulte que : $\begin{cases} 0 \text{ est v.p. de } J \text{ d'ordre exactement } n-1 \\ n \text{ est v.p. de } J \text{ d'ordre exactement } 1 \end{cases}$

et que, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(J)$, $\dim E_\lambda =$ ordre de multiplicité de λ , i.e. J diagonalisable

[Rem : J symétrique réelle donc...]

• D'après B.2. b. $\dim M = \dim C(J) = 1 + (n-1)^2$

PARTIE III

1)

$$T = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & 1 \\ -a_2 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a_{n-1} & & & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

• On a $|\det(T)| = 1$ (en développant par exemple selon la dernière colonne...
donc T inversible donc $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base de E

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & a_0 \\ 1 & 0 & & 1 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Un calcul relativement simple donne

$$AT = T^{-1}A$$

d'où ${}^tA = T^{-1}AT$ et tA et A sont semblables

• $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ et $T = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$

donc $M_{\mathcal{B}'}(u) = T^{-1}AT = {}^tA$

2) a) ${}^tA \cdot V_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ a_0 & \dots & a_{n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \\ \sum a_k \lambda_i^k \end{pmatrix}$ (en confondant V_i et la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$)

Or, pour tout i , $\lambda_i^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k$, puisque λ_i est racine du polynôme caractéristique de u . On a donc ${}^tA \cdot V_i = \lambda_i V_i$, i.e. $u(V_i) = \lambda_i V_i$: V_i est donc bien un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_i

b). Le système $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est une base $\mathcal{B}''$ de E (car il s'agit de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes). La matrice M de ce système dans la base $\mathcal{B}'$ n'est donc rien d'autre que la matrice de passage $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$.

Or la matrice de u dans $\mathcal{B}''$ est $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On a donc :

$$D = \Pi^{-1} {}^t A \Pi, \text{ i.e. } {}^t A \Pi = \Pi D$$

.6

On obtient :

$$(\Pi {}^t \Pi)^{-1} {}^t A (\Pi {}^t \Pi) = {}^t \Pi^{-1} \underbrace{{}^t \Pi^{-1} {}^t A \Pi} {}^t \Pi = {}^t \Pi^{-1} D \Pi = {}^t (\Pi {}^t D \Pi^{-1}) = {}^t (\Pi D \Pi^{-1}) = {}^t ({}^t A) = A$$

3) a) Pour $v^{-1} = u \Rightarrow v u = u v$. Donc $v \in C(u)$, et, d'après B.2., v laisse stable les sous-espaces propres de u . Or ces sous-espaces propres sont de dimension 1, donc la restriction de v à chacun d'eux est une homothétie.

b) On en déduit : si une matrice commute avec une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont distincts, elle est diagonale (résultat d'ailleurs déjà démontré en classe)

$$\text{Ici on a : } ({}^t \Pi T \Pi) D = {}^t \Pi T (\Pi D) = {}^t \Pi T ({}^t A \Pi) = {}^t \Pi (T {}^t A) \Pi = {}^t \Pi A T \Pi \\ = {}^t ({}^t A \Pi) T \Pi = {}^t (\Pi D) T \Pi = {}^t D {}^t \Pi T \Pi = D {}^t \Pi T \Pi$$

Donc ${}^t \Pi T \Pi$ commute avec D et, d'après la remarque ci-dessus, ${}^t \Pi T \Pi$ est diagonale

PARTIE II

1) Puisque $u^{p-1} \neq 0$ (par déf. de p), il existe bien $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$. Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tels que $\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^i(x_0) = 0$. En appliquant u^{p-1} à cette égalité on trouve $\lambda_0 u^{p-1}(x_0) = 0$ (car $u^k = 0$ si $k \geq p$), d'où $\lambda_0 = 0$. En appliquant alors u^{p-2} , on trouve $\lambda_1 u^{p-1}(x_0) = 0$, d'où $\lambda_1 = 0$ etc... Ainsi, tous les λ_i sont nuls et le système $\{x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0)\}$ est libre.

On en déduit évidemment que son cardinal est inférieur à $\dim E$, soit $p \leq n$.

Si $p = n$, alors $\{x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0)\}$ est une base de E , donc u est cyclique.

Réciproquement, si u est cyclique, on sait que $\{I_E, u, \dots, u^{n-1}\}$ est une partie libre de $\mathcal{L}(E)$. Donc, en particulier, $u^{n-1} \neq 0$, d'où $p \geq n$, soit $p = n$.

2) a) $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$: facile.

b) $P \in \text{Ker } \Delta \Leftrightarrow P(X+1) - P(X) = 0$. Or, si P est de degré $p > 0$, $P(X+1) - P(X)$ est de degré $p-1$ (considérez les termes de + haut degré). Donc $P(X+1) - P(X) = 0 \Rightarrow P$ polynôme constant. Réciproquement, si P est constant, on a bien $\Delta P = 0$, de sorte que $\text{Ker } \Delta = \{\text{ensemble des polynômes constants}\} = \mathbb{R}_0[X]$

On a, si P est de degré $\leq k$, ΔP de degré $\leq k-1$ (si $k \geq 1$). Donc

• $\text{Im } \Delta \subset \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Puisque $\text{Ker } \Delta$ est une droite, le théorème du rang donne $\dim(\text{Im } \Delta) = \dim(\mathbb{R}_{k-1}[X])$ d'où $\text{Im } \Delta = \mathbb{R}_{k-1}[X]$

• On a alors: $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $\text{Im } \Delta^i = \mathbb{R}_{k-i}[X]$. Donc $\Delta^k \neq 0$ et $\Delta^{k+1} = 0$.

Ainsi, Δ est nilpotent d'indice $k+1 = \dim(\mathbb{R}_k[X])$ et, d'après la question précédente, Δ est cyclique.

c) D commute avec Δ : facile

d) D'après A-2., $C(\Delta) = \text{Vect}(\{Id, \Delta, \dots, \Delta^k\})$ et $\{Id, \Delta, \dots, \Delta^k\}$ base de $C(\Delta)$

Puisque $D \in C(\Delta)$, il existe bien $(\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tq: $D = \sum_{i=0}^k \alpha_i \Delta^i$.

3) La matrice N d'ordre n définie par $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice

n . Elle représente donc un endomorphisme nilpotent d'indice n de $\mathbb{R}^n$, et, d'après la question 1., N est cyclique.

On a donc: $C(N) = \text{Vect}(\{I_n, N, \dots, N^{n-1}\})$

donc $M \in C(N) \Leftrightarrow \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_1 \end{pmatrix}$.

FIN!