# CORRIGÉ : SOUS-ESPACES DE $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ DONT LES ÉLÉMENTS ONT UN RANG MAJORÉ

## A - Résultats préliminaires

**A.1** **a)** On note $X = {}^t(x_1,\dots,x_n)$, alors ${}^tXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, qui est une somme de réels positifs, donc n'est égale à zéro que si chaque terme est nul.

**b)** L'inclusion $\operatorname{Ker} M \subset \operatorname{Ker}({}^tMM)$ est immédiate (voir aussi la 1ère question du problème précédent).
Soit $X \in \operatorname{Ker}({}^tMM)$. Alors ${}^tMMX = 0$ donc ${}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)(MX) = 0$. D'après la question précédente, on en déduit que $MX = 0$ donc $X \in \operatorname{Ker} M$.

**A.2** **a)** $X = -A^{-1}BY$ et $(D - CA^{-1}B)Y = 0$.

**b)** La question précédente montre que

$$\operatorname{Ker} M = \left\{ \begin{bmatrix} -A^{-1}BY \\ Y \end{bmatrix} \text{ tq } Y \in \operatorname{Ker}(D - CA^{-1}B) \right\}.$$

Ainsi, l'espace $\operatorname{Ker} M$ est l'image de $\operatorname{Ker}(D - CA^{-1}B)$ par l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{M}_{n-r,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ Y & \longmapsto \begin{bmatrix} -A^{-1}BY \\ Y \end{bmatrix}. \end{cases}$$

L'application $f$ est injective (son noyau est réduit à $\{0\}$), ce qui montre que $\operatorname{Ker}(D - CA^{-1}B)$ et son image $\operatorname{Ker} M = f\big(\operatorname{Ker}(D - CA^{-1}B)\big)$ ont même dimension.

**c)** On peut extraire de $M$ la matrice carrée $A$ inversible d'ordre $r$, donc, d'après un th. du cours, $\operatorname{rg} M \geqslant r$.

Enfin, on a l'égalité $\operatorname{rg}(M) = r$ si et seulement si $\dim\big(\operatorname{Ker} M\big) = n - r$, et donc, par injectivité de $f$, si et seulement si $\operatorname{Ker}(D - CA^{-1}B)$ est égal à l'espace de départ de $f$, c'est-à-dire si et seulement si $D - CA^{-1}B = 0$.

(*Rem :* Une autre démonstration est possible en appliquant le théorème du rang à $M$ et à $T$...)

**A.3** On définit l'application

$$g : \begin{cases} \mathbb{M}_{n-r}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^tB & A \end{bmatrix}. \end{cases}$$

L'application $g$ est linéaire, injective, d'image $W_r$, ce qui montre que $W_r$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (image d'un ev par une application linéaire) de dimension égale à celle de $\mathbb{M}_{n-r}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\dim(W_r) = (n-r)^2 + r(n-r) = n(n-r)$.

**A.4** **a)** Par la même méthode, on montre que $W'_r$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2r(n-r)$.

**b)** Il est facile de voir que $\langle\,|\,\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique.
Montrons qu'elle est définie positive, c'est-à-dire que, pour tout $M \in W'_r$, $\langle M|M\rangle \geqslant 0$ et $\langle M|M\rangle = 0 \Longleftrightarrow M = 0$.
En posant $M = \begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^tC & 0 \end{bmatrix}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r \\ 1\leqslant j\leqslant n-r}}$ et $C = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r \\ 1\leqslant j\leqslant n-r}}$, on a $\langle M|M\rangle = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant r \\ 1\leqslant j\leqslant n-r}} (b_{ij}^2 + c_{ij}^2)$, ce qui montre immédiatement le résultat voulu.

**A.5** — $\mathscr{K}_F$ est non vide car il contient la matrice nulle ($\operatorname{Ker} 0 = \mathbb{R}^n$). Si $A, B \in \mathscr{K}$ et si $\lambda_i n\mathbb{R}$, alors, pour tout $X \in F$, $X \in \operatorname{Ker} A$ et $X \in \operatorname{Ker} B$ donc $(\lambda A + B)X = \lambda AX + BX = 0$ d'où $X \in \operatorname{Ker}(\lambda A + B)$. Ainsi, $F \subset \operatorname{Ker}(\lambda A + B)$ et $\lambda A + B \in \mathscr{K}_F$. $\mathscr{K}_F$ est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $S$ un supplémentaire de $F$ dans $\mathbb{R}^n$. On sait qu'un endomorphisme $a$ de $\mathbb{R}^n$ est entièrement déterminé par ses restrictions à $F$ et à $S$. La matrice $A$ de $a$ appartient à $\mathscr{K}_F$ si et seulement si $a|_F = 0$. La donnée de $A \in \mathscr{K}_F$ est donc équivalente à la donnée d'une application linéaire de $S$ dans $\mathbb{R}^n$, autrement dit, $\mathscr{K}_F$ est isomorphe à $\mathscr{L}(S, \mathbb{R}^n)$. Donc $\boxed{\dim \mathscr{K}_F = \dim \mathscr{L}(S, \mathbb{R}^n) = n \dim S = n(n - \dim F).}$

— $\mathscr{I}_G$ est non vide car il contient la matrice nulle ($\operatorname{Im} 0 = \{0\}$). Si $A, B \in \mathscr{I}_G$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda A + B)(X) = \lambda \underbrace{AX}_{\in G} + \underbrace{BX}_{\in G} \in G$ car $G$ est un sous-espace vectoriel , donc $\operatorname{Im}(\lambda A + B) \subset G$ et $\lambda A + B \in \mathscr{I}_G$. $\mathscr{I}_G$ est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Dire qu'un endomorphisme $a$ de $\mathbb{R}^n$ appartient à $\mathscr{I}_G$ équivaut à dire que $a$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $G$. $\mathscr{I}_G$ est donc isomorphe à $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, G)$ donc $\boxed{\dim \mathscr{I}_G = n \dim G.}$

## B - Détermination de la dimension maximale

**B.1** **a)** Pour tout $\lambda$, la matrice $M_\lambda$ est élément de V (en tant que combinaison linéaire de deux éléments de V). De plus, si $\lambda \neq 0$, la matrice $\lambda I_r$ est inversible ; on applique alors le résultat de la question A.2.c : puisque $\mathrm{rg}(M_\lambda) \leqslant r$, on a donc $A = \dfrac{1}{\lambda}\,{}^tBB$. Cette relation doit être vérifiée pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ce qui montre que $\boxed{A = {}^tBB = 0.}$

La question A.1.b permet d'affirmer que B et ${}^tBB$ ont même rang, donc que $\boxed{B = 0.}$

**b)** La question précédente montre que $V \cap W_r = \{0\}$, donc que ces espaces sont en somme directe dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\dim(V) + \dim(W) \leqslant n^2$ et donc, par la question A.3, que $\boxed{\dim V \leqslant nr.}$

**B.2** **a)** Notons $r'$ le rang maximum des matrices de V ; alors $r' \leqslant r$. On choisit, dans V, une matrice A de rang $r'$. Il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que

$$PAQ = J_{r'} = \begin{bmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On considère l'application $h : \begin{cases} \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ K & \longmapsto & PKQ. \end{cases}$ C'est un automorphisme de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ (linéaire et bijective puisque P et Q sont inversibles) qui conserve le rang : $\mathrm{rg}\, h(M) = \mathrm{rg}\, M$ pour tout $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
L'espace $h(V)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices de rang $\leqslant r'$, et contenant $J_{r'}$. La question précédente montre alors que $\dim h(V) \leqslant nr' \leqslant nr$ et donc, puisque $h$ est bijective, que $\boxed{\dim(V) \leqslant nr.}$

**b)** immédiat.

## C - Étude des sous-espaces de dimension maximale

**C.1** **a)** Les coefficients de $\widetilde{xI_r - A}$ sont, au signe près, les déterminants de matrices d'ordre $r-1$ extraites de $xI_r - A$. Chacun de ces déterminants est un polynôme en $x$, de degré $\leqslant r-1$. Pour tout $(i,j) \in [1,r]^2$, il existe donc des réels $u_{ijk}$ avec $0 \leqslant k \leqslant r-1$ tels que $\left(\widetilde{xI_r - A}\right)_{ij} = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} u_{ijk} x^k$. En notant $U_k$ la matrice dont chaque coefficient d'indice $(i,j)$ est égal à $u_{ijk}$, on obtient la relation demandée.

**b)** cf. cours sur la réduction des endomorphismes (polynôme caractéristique).

**c)** — La relation rappelée au début de la question permet d'écrire

$$\left(\widetilde{xI_r - A}\right)(xI_r - A) = P_A(x) I_r \quad (*)$$

On a donc $P_A(x)I_r = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} x^k U_k\right)(xI_r - A) = x^r U_{r-1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} x^k (U_{k-1} - U_k A) - U_0 A.$
En considérant alors chaque coefficient des matrices écrites ci-dessus, puis en considérant les termes de plus haut degré des polynômes obtenus, on en déduit (puisque le terme dominant de $P_A(x)$ est $x^r$) : $I_r = U_{r-1}$.

— La relation $(*)$ implique que, lorsque $x$ n'est pas racine de $P_A$, $(xI_r - A)$ est inversible et que

$$(xI_r - A)^{-1} = \frac{1}{P_A(x)}\left(\widetilde{xI_r - A}\right) = \frac{1}{P_A(x)} \sum_{k=0}^{r-1} x^k U_k$$

**d)** Choisissons $\lambda$ non racine de $P_A$. Alors $\lambda I_r - A$ est inversible, et, puisque $M_\lambda$ est de rang $\leqslant r$, il résulte de A.2.c que : $D = {}^tC(\lambda I_r - A)^{-1}B$ d'où, en utilisant la relation précédente

$$D = \frac{1}{P_A(\lambda)} \sum_{k=0}^{r-1} \lambda^k ({}^tCU_kB)$$

Cette relation est valable pour tout $\lambda$ non racine de $P_A$. Puisque $\deg P_A = r$, on en déduit, en faisant tendre $\lambda$ vers $+\infty$, $\boxed{D = 0}$.

On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda^k ({}^tCU_kB) = 0$ pour une infinité de valeurs de $\lambda$ ; on en déduit ${}^tCU_kB = 0$ pour tout $k \in [1, r-1]$.
En particulier, pour $k = r-1$, $U_{r-1} = I_r$ et on obtient $\boxed{{}^tCB = 0.}$

**C.2** **a)** Tout élément M de V peut s'écrire par blocs sous la forme $M = \begin{bmatrix} A & B \\ {}^tC & D \end{bmatrix}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $M_\lambda = M - \lambda J_r$ appartient à V puisque V est un espace vectoriel . Elle est donc de rang $\leqslant r$, et le résultat découle directement de la question précédente.

**b)** — Si $M = \begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^tC & 0 \end{bmatrix}$ appartient à $\mathscr{W}$, alors ${}^tM = \begin{bmatrix} 0 & C \\ {}^tB & 0 \end{bmatrix}$ donc $\langle M | {}^tM \rangle = {}^tBC + {}^tCB = 0$ (en effet, ${}^tCB = 0$ d'après la question précédente, d'où aussi, en transposant cette égalité, ${}^tBC = 0$).

— Si $(M_1, M_2) \in \mathscr{W}^2$, alors $M_1 + M_2 \in \mathscr{W}$ donc $\langle M_1 + M_2 | {}^tM_1 + {}^tM_2 \rangle = 0$, ce qui donne, en développant par bilinéarité, compte tenu de $\langle M_1 | {}^tM_1 \rangle = \langle M_2 | {}^tM_2 \rangle = 0$ et de $\langle M_1 | {}^tM_2 \rangle = \langle M_2 | {}^tM_1 \rangle$ (vérification facile), l'égalité $\boxed{\langle M_1 | {}^tM_2 \rangle = 0.}$

— Si on note $t$ l'application $t : \begin{cases} \mathscr{W} & \longrightarrow & W'_r \\ M & \longmapsto & {}^tM \end{cases}$, le résultat précédent se traduit en disant que les sous-espaces vectoriels $\mathscr{W}$ et $t(\mathscr{W})$ sont orthogonaux. Ils sont donc en somme directe, d'où $\dim \mathscr{W} + \dim t(\mathscr{W}) \leqslant \dim W'_r$. Mais $t(\mathscr{W})$ a la même dimension que $\mathscr{W}$ puisque $t$ est injective, donc $2 \dim \mathscr{W} \leqslant \dim W'_r$. Puisque, d'après A.3, $\dim W'_r = 2r(n-r)$, on en déduit $\boxed{\dim \mathscr{W} \leqslant r(n-r).}$

**c)** L'application proposée est clairement linéaire et injective (son noyau est réduit à $\{0\}$). Son image est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathscr{W}$ qui a même dimension que V, i.e $nr$. Or $dim(\mathbb{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathscr{W}) = r^2 + \dim \mathscr{W} \leqslant nr$ d'après la question précédente. Il en résulte que l'image est exactement égale à $\mathbb{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathscr{W}$, i.e que l'application est aussi surjective.

$\boxed{\text{C'est donc bien un isomorphisme entre V et } \mathbb{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathscr{W}.}$

**d)** Choisissons $A \in \mathbb{M}_r(\mathbb{R})$ inversible. Alors, d'après A.2.c, la matrice $\begin{bmatrix} A & V \\ {}^tU & 0 \end{bmatrix}$ est de rang $\geqslant r$, et elle sera de rang $r+1$ si et seulement si $0 \neq {}^tUA^{-1}V$. Considérons la forme linéaire $\varphi_U : \begin{cases} \mathbb{M}_{r,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & {}^tUX \end{cases}$. Cette forme linéaire est non nulle puisque U est non nul, donc son noyau est un hyperplan H de $\mathbb{M}_{r,1}(\mathbb{R})$. La condition ${}^tUA^{-1}V = 0$ est équivalente à $A^{-1}V \in H$ donc à $V \in A(H)$. Si on considère un vecteur $W \notin H$ et un hyperplan $H'$ supplémentaire de $\mathbb{R}V$, on peut construire une application linéaire A telle que $A|_H$ soit un isomorphisme de H sur $H'$ (en effet, $\dim H = \dim H' = r-1$) et telle que $AW = V$. Cette application est alors bijective, et, puisque $V \notin H' = A(H)$, on a bien ${}^tUA^{-1}V \neq 0$. Cette application (ou plutôt sa matrice) répond bien à la question.

**e)** Supposons que $M = \begin{bmatrix} A & B \\ {}^tC & 0 \end{bmatrix}$ soit dans V, et, par l'absurde, $B \neq 0$ et $C \neq 0$. Il existe alors une colonne V de B et une colonne U de C qui sont non nulles. D'après la question précédente, il existe une matrice $A' \in \mathbb{M}_r(\mathbb{R})$ telle que la matrice (d'ordre $r+1$) $\begin{bmatrix} A' & V \\ {}^tU & 0 \end{bmatrix}$ soit inversible. La matrice $M' = \begin{bmatrix} A' & B \\ {}^tC & 0 \end{bmatrix}$ est donc de rang $\geqslant r+1$ (car on peut en extraire une matrice inversible d'ordre $r+1$). Or, compte tenu de l'isomorphisme de la question C.2.c, cette matrice est dans V puisque la matrice $\begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^tC & 0 \end{bmatrix}$ est dans $\mathscr{W}$ : contradiction.

**f)** S'il existait dans V deux matrices de la forme $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A' & 0 \\ {}^tC & 0 \end{bmatrix}$ avec $B \neq 0$ et $C \neq 0$, alors la matrice $\begin{bmatrix} A+A' & B \\ {}^tC & 0 \end{bmatrix}$ serait aussi dans V, ce qui contredit C.2.e.

**C.3** **a)** Si toutes les matrices de V étaient de rang $r' < r$ alors on aurait $\dim V \leqslant nr'$ d'après B.2.a !

**b)** Il existe donc dans V une matrice A de rang $r$, qui est donc équivalente à $J_r$, et on raisonne alors comme dans B.2.a. (exercice).

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆