

PSEUDO-INVERSE D'UNE MATRICE CARRÉE (extrait de ICARE 1997)¹

Le but de ce problème est de généraliser la notion d'inverse d'une matrice carrée à coefficients dans \mathbb{R} .

On notera $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{R} et $\text{tr}A$ la trace de la matrice A .

Pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, on notera Φ_A l'endomorphisme de \mathbb{R}^n qui lui est canoniquement associé. $\text{Ker}\Phi_A$ et $\text{Im}\Phi_A$ seront simplement notés $\text{Ker}A$ et $\text{Im}A$.

Soit A une matrice non nulle de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, on définit les relations :

$$(1) \quad AMA = A \quad (2) \quad MAM = M \quad (3) \quad AM = MA$$

Si (1) et (2) sont vérifiées, on dit que M est un inverse faible de A , et si (1), (2) et (3) sont vérifiées, on dit que M est un pseudo-inverse de A .

1. Deux résultats préliminaires :

a) Démontrer que, pour tout couple (A, B) de matrices carrées d'ordre n , $\text{Im}(AB) \subset \text{Im}A$ et $\text{Ker}B \subset \text{Ker}(AB)$.

b) Démontrer que, pour tout couple (A, B) de matrices carrées d'ordre n , $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}A, \text{rg}B)$.

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^3 et en déduire un pseudo-inverse de A .

Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est aussi un inverse faible de A . Est-ce aussi un pseudo-inverse ?

3. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Quels sont les inverses faibles de A ?

Montrer que A ne possède pas de pseudo-inverse.

4. On suppose que M vérifie (1), c'est-à-dire que $AMA = A$.

a) Prouver que AM et MA sont des matrices de projection.

b) Prouver que $\text{rg}A = \text{rg}(AM) = \text{rg}(MA) = \text{tr}(AM)$.

5. On suppose A inversible. Si M vérifie (1), prouver que M est unique, et que c'est un pseudo-inverse de M .

Peut-on obtenir les mêmes conclusions si on suppose seulement que M vérifie (2) et (3) ?

6. On suppose que M et M' sont des pseudo-inverses de A .

Calculer $AMAM'$ et $MAM'A$. En déduire $AM' = MA$ puis $M = M'$. Conclure.

7. En supposant que A admet un pseudo-inverse M , prouver que les matrices suivantes ont un pseudo-inverse et le calculer :

$$M; \quad \lambda A \ (\lambda \in \mathbb{R}^*); \quad A^k \ (k \in \mathbb{N}^*); \quad {}^tA; \quad PAP^{-1} \ (P \text{ inversible}).$$

8. On suppose que $\text{Im}A \cap \text{Ker}A = \{0\}$.

a) Montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Im}A \oplus \text{Ker}A$.

b) On note p la projection sur $\text{Im}A$ parallèlement à $\text{Ker}A$.

Démontrer que $\Phi_A \circ p = p \circ \Phi_A = \Phi_A$.

1. Ceci n'est qu'une partie de l'épreuve, qui en comportait trois. Cette partie est la copie presque conforme de la première partie (sur 7) de ENS Ulm 1988. Dans la petite histoire des concours, on a ensuite retrouvé les pseudo-inverses à : CCP MP 1998, ENSAI MP 2001, CCP PC 2001, CCP PC 2006, MINES PC-PSI 2007, CENTRALE PSI 2009, et j'en oublie certainement.

- c) Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique élément w de $\text{Im}A$ tel que $\Phi_A(w) - v \in \text{Ker}A$.
- d) On note alors $w = \varphi(v)$. Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme φ de \mathbb{R}^n , et que sa matrice relativement à la base canonique est un pseudo-inverse de A .

9. On suppose que A admet un pseudo-inverse M .

- a) Montrer que $\text{Im}M = \text{Im}A$, que $\text{Ker}M = \text{Ker}A$ et que $\mathbb{R}^n = \text{Im}A \oplus \text{Ker}A$.
- b) Montrer que AM est la matrice de la projection de \mathbb{R}^n sur $\text{Im}A$ parallèlement à $\text{Ker}A$.

10. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) A admet un pseudo-inverse ;
- (ii) $\text{Im}(A^2) = \text{Im}(A)$;
- (iii) $\text{Ker}(A^2) = \text{Ker}(A)$;
- (iv) A et A^2 ont même rang ;
- (v) il existe $V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^2V = A$; (4)
- (vi) il existe $W \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $WA^2 = A$. (5)

11. Soient V et W dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant (4) et (5) respectivement.

Prouver que l'on a $WAV = AV^2 = W^2A$ et que WAV est un pseudo-inverse de A .

