CORRIGÉ DS N^{o}3

Idéaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Bases stables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
d'après ESIM 2002 (parties I à V) et ENSAE 1983 (partie VI.)

I) Résultats préliminaires.

Rem : Il s'agissait ici de questions de cours, que l'on demandait explicitement de (re)démontrer. Pour cette raison, les démonstrations suivantes seront un peu abrégées...

1°) **a)** Il s'agit ici du *théorème de la base incomplète* (après avoir noté que $\dim \operatorname{Ker} u = n - r$).

b) Il s'agit ici du *théorème d'isomorphisme* : la restriction de u à tout supplémentaire du noyau réalise un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\operatorname{Im} u$.

c) $(u(\mathrm{e}_1), u(\mathrm{e}_2), \dots, u(\mathrm{e}_r))$ est une base de $\operatorname{Im} u$ donc une famille libre de $\mathbb{R}^n$, que l'on peut compléter en une base de $\mathbb{R}^n$; notons-là $\mathcal{B}' = (u(\mathrm{e}_1), u(\mathrm{e}_2), \dots, u(\mathrm{e}_r), \mathrm{e}'_{r+1}, \dots, \mathrm{e}'_n)$.
La matrice de u dans les bases $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \dots, \mathrm{e}_n)$ et $\mathcal{B}'$ est $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; si $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$ et Q celle de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}'$, on a alors, d'après le cours : $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = Q^{-1}AP$, donc A est bien équivalente à $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2°) **a)** Si A est équivalente à B, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$ car le rang d'une matrice est inchangé lorsqu'on la multiplie par une matrice inversible.
Réciproquement, si $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$, A et B sont toutes deux équivalentes à $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ d'après la question précédente donc équivalentes entre elles par transitivité.

b) Découle de ce qui précède, car $\operatorname{rg}(D) = r = \operatorname{rg}(A)$.

II) Application.

1°) On a : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A) = f(A.I_n) = f(A)f(I_n)$. f n'étant pas l'application nulle, il existe A telle que $f(A) \neq 0$, donc on déduit de l'égalité ci-dessus : $f(I_n) = 1$.
Par suite, si A est inversible, $1 = f(I_n) = f(A.A^{-1}) = f(A)f(A^{-1})$ donc $f(A) \neq 0$.

2°) **a)** On choisit pour A_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ une matrice diagonale dont les $r + 1$ premiers éléments diagonaux sont égaux à 1, à l'exception du i-ème, et dont tous les autres éléments diagonaux sont nuls (c'est possible car $r < n$).
A_i est de rang r donc équivalente à A ; puisque le produit de matrices diagonales est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les produits des éléments diagonaux de ces matrices, on a bien $A_1 A_2 \dots A_{r+1} = 0$.

b) On a , pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $f(0_n) = f(A.0_n) = f(A)f(0_n)$. Puisqu'il existe A telle que $f(A) \neq 1$, on en déduit $f(0_n) = 0$.
D'où $f(A_1 A_2 \dots A_{r+1}) = f(A_1)f(A_2) \dots f(A_{r+1}) = 0$, donc l'un des $f(A_i)$ est nul ; A étant équivalente à A_i, $A = PA_iQ$ avec P, Q inversibles, d'où $f(A) = f(P)f(A_i)f(Q) = 0$.

3°) Facilement : $f(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ inversible.
Un exemple de telle application est le déterminant !

III) Idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1°) Si $I_n \in \mathcal{J}$ alors : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = A.I_n \in \mathcal{J}$ donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{J}$ d'où $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2°) Si $\mathcal{J}$ contient une matrice inversible A, il contient alors $I_n = AA^{-1}$ donc $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.

3°) **a)** A est équivalente à $J_r = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc il existe P, Q inversibles telles que $J_r = PAQ$.
Or $A \in \mathcal{J}$ et $\mathcal{J}$ est un idéal à droite donc $AQ \in \mathcal{J}$ puis, étant aussi un idéal à gauche $PAQ \in \mathcal{J}$. Finalement : $J_r \in \mathcal{J}$.

b) Pour tout $i \in [\![1, n-r+1]\!]$, soit A_i la matrice diagonale dont les $r-1$ premiers termes ainsi que le $(r-1+i)$-ème sur la diagonale sont égaux à 1, les autres étant nuls.
Chaque A_i est de rang r, donc équivalente à A, et $A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-r+1}$ est une matrice diagonale à éléments diagonaux non nuls, donc inversible.

4°) Soit $\mathcal{J}$ un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :
• soit $\mathcal{J} = \{0\}$
• soit il existe dans $\mathcal{J}$ une matrice A de rang $r \geqslant 1$; on construit alors comme dans la question précédente des matrices A_i, équivalentes à A, telles que $A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-r+1}$ soit inversible.
Les A_i étant équivalentes à A appartiennent à $\mathcal{J}$ (comme dans 3.a), et, $(\mathcal{J}, +)$ étant un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, leur somme appartient encore à $\mathcal{J}$.
Ainsi, $\mathcal{J}$ contient une matrice inversible, donc est égal à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En conclusion, les seuls idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont : $\{0\}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

IV) Idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1°) • $\mathcal{J}_{\mathrm{E}}$ est non vide car il contient la matrice nulle.
• Si $A, B \in \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$, alors $A - B \in \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$ car $\mathrm{Im}(A - B) \subset \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B) \subset E$ (ainsi, $\mathcal{J}_{\mathrm{E}}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$).
• Enfin, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$, alors $\mathrm{Im}(AM) \subset \mathrm{Im}(A) \subset E$ donc $AM \in \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$.
Cela prouve que : $\mathcal{J}_{\mathrm{E}}$ est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2°) **a)** C'est le théorème d'isomorphisme (ici, sous forme matricielle)...

b) Pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $B\mathrm{e}_i \in \mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A)$. D'après la question précédente, il existe un et un seul ε_i de S tel que $B\mathrm{e}_i = \phi(\varepsilon_i)$ soit $A\varepsilon_i = B\mathrm{e}_i$.

c) Pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $B\mathrm{e}_i = A\varepsilon_i = A(C\mathrm{e}_i)$ car $C\mathrm{e}_i$ représente la i-ème colonne de C, i.e ε_i.
D'où $B = AC$.

3°) **a)** L'image d'une matrice est le sous-espace vectoriel engendré par ses colonnes. On a donc, avec des notations évidentes :
$\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Vect}(D_1, \ldots, D_{2n}) = \mathrm{Vect}(A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n)$
$= \mathrm{Vect}(A_1, \ldots, A_n) + \mathrm{Vect}(B_1, \ldots, B_n) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$.

On peut aussi démontrer ce résultat en utilisant le produit par blocs :
$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = AX_1 + BX_2$, avec $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$.

b) Puisque $\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(D)$, il suffit d'appliquer directement IV.2 !

c) $W \in \mathcal{M}_{(2n,n)}(\mathbb{R})$ s'écrit par blocs : $W = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ avec $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'égalité $C = DW$ donne alors : $C = [AB] \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = AU + BV$

4°) **a)** L'ensemble des rangs des matrices $M \in \mathcal{J}$ est un ensemble non vide d'entiers, majoré par n ; il admet donc un plus grand élément r, d'où les résultats.

b) Soit $F = \mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(M_0)$. On peut toujours trouver $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Im}(P) = F$ (par exemple, une projection sur F). On a alors : $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(M_0)$ et, d'après la question précédente, il existe $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P = MU + M_0V$
$\mathcal{J}$ étant un idéal à droite, $MU \in \mathcal{J}$ et $M_0V \in \mathcal{J}$ donc $P \in \mathcal{J}$.
Or $\mathrm{rg}(P) = \dim(F) = \dim(\mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(M_0)) > r$ puisque $\mathrm{Im}(M)$ n'est pas contenue dans $\mathrm{Im}(M_0)$, ce qui contredit la définition de r.
En conclusion, pour tout $M \in \mathcal{J}$, $\mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Im}(M_0)$, soit $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_{\mathrm{Im}(M_0)}$

5°) Réciproquement, si $M \in \mathcal{J}_{\mathrm{Im}(M_0)}$, on a $\mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Im}(M_0)$. D'après IV.2, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = M_0C$. Puisque $M_0 \in \mathcal{J}$ et que $\mathcal{J}$ est un idéal à droite, on a $M \in \mathcal{J}$, soit l'inclusion inverse et finalement : $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\mathrm{Im}(\mathcal{M}_0)}$.

6°) Conclusion : les idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les parties de la forme :
$$\mathcal{J}_{\mathrm{E}} = \{\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) /\ E \text{ contient } \mathrm{Im}(A)\}.$$
où E est un sous-espace vectoriel quelconque de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$ (pour $E = \{0\}$, $\mathcal{J}_{\mathrm{E}} = \{0\}$ et, pour $E = \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$, $\mathcal{J}_{\mathrm{E}} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: c'est le cas des idéaux bilatères).

V) Idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1°) • $\mathcal{K}_{\mathrm{F}} \neq \emptyset$ car la matrice nulle appartient à $\mathcal{K}_{\mathrm{F}}$.
• Si $A, B \in \mathcal{K}_{\mathrm{F}}$, $A - B \in \mathcal{K}_{\mathrm{F}}$ puisque $E \subset \mathrm{Ker}(A)$ et $E \subset \mathrm{Ker}(B)$ impliquent facilement $E \subset \mathrm{Ker}(A - B)$. Ainsi, $\mathcal{K}_{\mathrm{F}}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.
• Enfin, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{K}_{\mathrm{F}}$, $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(MA)$ donc $MA \in \mathcal{K}_{\mathrm{F}}$.
Cela prouve que : $\mathcal{K}_{\mathrm{F}}$ est un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2°) **a)** Soir $r = \mathrm{rg}(u)$ et $s = \mathrm{rg}(v)$. Puisque $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$, on a $r \geqslant s$.
Soit $(\mathrm{e}_{r+1}, \mathrm{e}_{r+2}, \ldots, \mathrm{e}_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$, que l'on complète en une base $(\mathrm{e}_{s+1}, \ldots, \mathrm{e}_{r+1}, \ldots, \mathrm{e}_n)$ de $\mathrm{Ker}(v)$, que l'on complète ensuite en une base $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
On sait que $(u(\mathrm{e}_1), u(\mathrm{e}_2), \ldots, u(\mathrm{e}_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$ (cf. I.1) ; on la complète alors en une base $(u(\mathrm{e}_1), \ldots, u(\mathrm{e}_r), \mathrm{e}'_{r+1}, \ldots, \mathrm{e}'_p)$ de $\mathbb{R}^p$.
On sait alors que l'on peut définir une application linéaire w de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ par :
$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, r]\!] & , \quad w[u(\mathrm{e}_i)] = v(\mathrm{e}_i) \\ \forall i \in [\![r+1, p]\!] & , \quad w(\mathrm{e}'_i) = 0 \end{cases}$$
On a alors :
$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, r]\!] & , \quad w \circ u(\mathrm{e}_i) = v(\mathrm{e}_i) \\ \forall i \in [\![r+1, n]\!] & , \quad w \circ u(\mathrm{e}_i) = w(0) = 0 = v(\mathrm{e}_i) \quad (\text{car alors } \mathrm{e}_i \in \mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)\ ) \end{cases}$$
On en déduit : $w \circ u = v$.

b) Il s'agit de la traduction matricielle du résultat précédent !

3°) Soit $D = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(2n,n)}(\mathbb{R})$, et $X \in \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$. Alors :
$DX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} AX \\ BX \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow AX = BX = 0 \Leftrightarrow X \in \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B)$.
Donc $\mathrm{Ker}(D) \subset \mathrm{Ker}(C)$. D'après la question précédente, il existe $W \in \mathcal{M}_{(n,2n)}(\mathbb{R})$ telle que $C = WD$. En écrivant $W = [U\ V]$ avec $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient :

$$C = [U\ V] \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = UA + VB$$

4°) *Il n'y avait plus ici d'indications ; il fallait donc s'inspirer de la méthode utilisée dans la partie précédente.*

• Soit $\mathcal{K}$ un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit r la plus petite des dimensions des $\mathrm{Ker}(M)$ lorsque M décrit $\mathcal{K}$, et $M_0 \in \mathcal{K}$ tel que $\dim(\mathrm{Ker}(M_0)) = r$.
Soit $M \in \mathcal{K}$. Montrons que $\mathrm{Ker}(M_0) \subset \mathrm{Ker}(M)$. Par l'absurde, si on n'a pas cette inclusion, alors $\mathrm{Ker}(M) \cap \mathrm{Ker}(M_0)$ est inclus *strictement* dans $\mathrm{Ker}(M_0)$, donc de dimension $< r$; soit alors $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le noyau est $\mathrm{Ker}(M) \cap \mathrm{Ker}(M_0)$ (par exemple, le noyau d'une projection). Puisque $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Ker}(M) \cap \mathrm{Ker}(M_0)$, il existe $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P = UM + VM_0$ d'après la question précédente. M et M_0 étant éléments de $\mathcal{K}$, idéal à gauche, on en déduit $P \in \mathcal{K}$. Mais $\dim(\mathrm{Ker}(P)) < r$, ce qui contredit le choix de r.

$$\text{Ainsi : } \forall M \in \mathcal{K}\ ,\ \mathrm{Ker}(M_0) \subset \mathrm{Ker}(M) \text{ soit } \mathcal{K} \subset \mathcal{K}_{\mathrm{Ker}(M_0)}.$$

• Réciproquement, si $M \in \mathcal{K}_{\mathrm{Ker}(M_0)}$, alors $\mathrm{Ker}(M_0) \subset \mathrm{Ker}(M)$, donc, d'après V.2.b, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = CM_0$. $\mathcal{K}$ étant un idéal à gauche, on a $M \in \mathcal{K}$ d'où l'inclusion inverse : $\mathcal{K}_{\mathrm{Ker}(M_0)} \subset \mathcal{K}$.

• *Conclusion :* Les idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les parties de la forme :

$$\mathcal{K}_{\mathrm{F}} = \{\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) /\ \mathrm{Ker}(M) \text{ contient F}\}.$$

où F est un sous-espace vectoriel quelconque de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$ (pour $F = \{0\}$, $\mathcal{K}_{\mathrm{F}} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, pour $F = \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$, $\mathcal{K}_{\mathrm{F}} = \{0\}$: c'est le cas des idéaux bilatères).

Remarque (pour les 5/2) : En fait, tous les résultats du V. peuvent se déduire presque immédiatement de ceux du IV.
En effet, lorsqu'on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, si A est la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme a, soit A^* celle canoniquement associée à l'adjoint a^* de a. À tout idéal à gauche $\mathcal{K}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut associer la partie $\mathcal{K}^* = \{M^*,\ M \in \mathcal{K}\}$. Il est alors facile de vérifier que $\mathcal{K}^*$ est un idéal à droite (car $(MA)^* = A^*M^*$). On a alors, puisque $\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^*)$ et $\mathrm{Im}(A) \subset E \Leftrightarrow E^\perp \subset \mathrm{Ker}(A^*)$, $\mathcal{J}_{\mathrm{E}} = \mathcal{K}^*_{E^\perp}$ *etc...*

5°) • Soit $M \in \mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$; alors $F \subset \mathrm{Ker}(M)$ et $\mathrm{Im}(M) \subset E$. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à M. En identifiant $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$, si $p = \dim(F)$ et $q = \dim(E)$, on peut trouver une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $(e_1, \ldots, e_p)$ soit une base de F et une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $(e'_1, \ldots, e'_q)$ soit une base de E. La matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est alors de la forme $\begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où $B \in \mathcal{M}_{(q,n-p)}(\mathbb{R})$.
Réciproquement, si u a une matrice de cette forme dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, il est facile de vérifier que $F \subset \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u) \subset E$. L'application qui, à tout endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ associe sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ étant un isomorphisme d'espaces vectoriels, on en déduit que $\mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$ est isomorphe au sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices de la forme $\begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où $B \in \mathcal{M}_{(q,n-p)}(\mathbb{R})$, donc à $\mathcal{M}_{(q,n-p)}(\mathbb{R})$.
Ainsi : $\dim(\mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}) = q(n-p) = \dim(E) \times (n - \dim(F))$.

• Si $\mathcal{J}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe E et F sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$ tels que $\mathcal{J} = \mathcal{K}_{\mathrm{F}} = \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$.
Or, dans le cas particulier $F = \{0\}$, on a $\mathcal{K}_{\mathrm{F}} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ce qui donne $\dim(\mathcal{J}_{\mathrm{E}}) = n\dim(E)$.
On a donc ici : $\mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}} = \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$ d'où $\dim(E) \times (n - \dim(F)) = n\dim(E)$ d'où $E = \{0\}$ ou $F = \{0\}$. On obtient donc $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{J} = \{0\}$.

VI) Application : bases stables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1°) Un exemple de base stable est évidemment la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (car $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$).

2°) **a)** • Soient $B \in \mathcal{B}$ et $A \in \mathcal{B}'$. $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(BA)$ donc, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(A) \geqslant \mathrm{rg}(BA)$, soit $\mathrm{rg}(BA) \leqslant r$. Puisque $BA \in \mathcal{B}$, on a donc, par définition de r : $BA = 0$ ou $BA \in \mathcal{B}'$.
• Soient $B \in \mathcal{B}$ et $A \in \mathcal{B}'$. $\mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}(A)$ donc $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(A) = r$, et, puisque $AB \in \mathcal{B}$, $AB = 0$ ou $AB \in \mathcal{B}'$.

b) Notons $\mathcal{B}' = (E_1, \ldots, E_s)$ et $\mathcal{B} = (E_1, \ldots, E_{n^2})$ ($s \leqslant n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$). Notons $\mathcal{J} = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}')$.
$\mathcal{J}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc, en particulier, $(\mathcal{J}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.
Soit $M \in \mathcal{J}$, $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i E_i$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \displaystyle\sum_{j=1}^{n^2} \mu_j E_j$. On a : $MA = \displaystyle\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n^2} \lambda_i\mu_j E_iE_j$ et $AM = \displaystyle\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n^2} \lambda_i\mu_j E_jE_i$. Or, pour $i \in [\![1, s]\!]$ et $j \in [\![1, n^2]\!]$, E_iE_j et E_jE_i appartiennent à $\mathcal{B}' \cup \{0\}$ d'après la question précédente, donc AM et MA appartiennent à $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}') = \mathcal{J}$.
Ainsi, $\mathcal{J}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non réduit à $\{0\}$. D'après III.4, $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'où $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}') = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
• $\mathcal{B}'$ est donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{card}(\mathcal{B}') = n^2 = \mathrm{card}(\mathcal{B})$ d'où $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$.

3°) **a)** *Cela a déjà été fait en classe, de plusieurs manières... C'était aussi dans le DS précédent... Je rappelle ici, brièvement, la démonstration matricielle :* Si M vérifie la relation de l'énoncé, alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $ME_{ij} = E_{ij}M$ (où (E_{ij}) est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). En écrivant $M = \displaystyle\sum_{k,l} m_{kl}E_{kl}$, on obtient : $ME_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{ki}E_{kj}$ et $E_{ij}M = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} m_{jl}E_{il}$ d'où l'on déduit M scalaire...

b) Si on avait $r = n$, toutes les matrices de $\mathcal{B}$ seraient inversibles. Donc, si $A, B \in \mathcal{B}$, on a $AB \in \mathcal{B}$ (le cas $AB = 0$ étant impossible).
L'application $B \mapsto AB$ est injective de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$ (car $AB = AB' \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AB' \Rightarrow B = B'$) ; $\mathcal{B}$ étant de cardinal fini, cette application est bijective de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$. On a donc : $MB = \Big(\displaystyle\sum_{A\in\mathcal{B}} A\Big)B = \sum_{A\in\mathcal{B}} AB = \sum_{C\in\mathcal{B}} C = M$, et, de même, $BM = M$.

c) *Conclusion :* $\mathcal{B}$ étant une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on aurait alors : $\forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $MN = NM$.
D'après 3.a, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$, d'où, d'après 3.b, $\forall B \in \mathcal{B}$, $\lambda B = \lambda I_n$.
Or, on ne peut avoir $\lambda = 0$, car $\mathcal{B}$ est libre, donc $\displaystyle\sum_{A\in\mathcal{B}} A \neq 0$. On en déduit $\mathcal{B} = \{I_n\}$, ce

qui est impossible puisque l'on a supposé $n \geqslant 2$.
Ainsi : $r < n$.

4°) **a)** • Si $A \in \mathcal{B}_{\mathrm{E}}$, $\mathrm{Im}(A) = E$ donc $A \in \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$ et, par suite, $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{\mathrm{E}}) \subset \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$.
D'autre part, soit $A \in \mathcal{B}_{\mathrm{E}}$, et $M \in \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$. Puisque $\mathrm{Im}(M) \subset E = \mathrm{Im}(A)$, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = AC$ (d'après IV.2.c).
Puisque $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire $C = \sum_{B\in\mathcal{B}} \lambda_B B$. On a alors, pour $B \in \mathcal{B}$, soit $AB = 0$, soit $AB \in \mathcal{B}$ et dans ce cas $\mathrm{rg}(AB) = r = \dim(E) = \dim(\mathrm{Im}A)$ d'où $\mathrm{Im}(AB) = \mathrm{Im}(A) = E$ et $AB \in \mathcal{B}_{\mathrm{E}}$. Donc $M = AC = \sum_{B\in\mathcal{B}} \lambda_B AB$ appartient en fait à $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{\mathrm{E}})$, ce qui démontre l'inclusion réciproque : $\mathcal{J}_{\mathrm{E}} \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{\mathrm{E}})$.
• Je vous laisse le soin de démontrer de façon tout à fait similaire (on utilise ici V.2b) que : $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}^{\mathrm{F}}) = \mathcal{K}_{\mathrm{F}}$

b) Il est clair que $(\mathcal{B}_{\mathrm{E}})_{E\in\mathcal{E}}$ est une partition de $\mathcal{B}$.
Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = \bigoplus_{E\in\mathcal{E}} \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{\mathrm{E}}) = \bigoplus_{E\in\mathcal{E}} \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$.

c) On peut donc écrire : $I_n = \sum_{E\in\mathcal{E}} M_E$ avec $M_E \in \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$. Donc, pour tout $X \in \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$, $X = \sum_{E\in\mathcal{E}} M_E X$, et $M_E X \in \mathrm{Im}(M_E) \subset E$, donc $X \in \sum_{E\in\mathcal{E}} E$ donc $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R}) = \sum_{E\in\mathcal{E}} E$.
De plus, $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2 = \sum_{E\in\mathcal{E}} \dim(\mathcal{J}_{\mathrm{E}}) = \sum_{E\in\mathcal{E}} n\dim(E)$ (cf. V.5) donc $n = \dim(\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})) = \sum_{E\in\mathcal{E}} \dim(E)$, ce qui prouve que la somme est directe et : $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{E\in\mathcal{E}} E$.

5°) **a)** $(\mathcal{B}_{\mathrm{E}})_{E\in\mathcal{E}}$ étant une partition de $\mathcal{B}$, $(\mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}})_{E\in\mathcal{E}}$ est une partition de $\mathcal{B}^{\mathrm{F}}$ qui est une base de $\mathcal{K}_{\mathrm{F}}$ (libre, car incluse dans $\mathcal{B}$, et génératrice d'après VI.4.a), d'où le résultat.

b) Notons déjà, d'après VI.4.a : $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}) \subset \mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$.
D'autre part, la somme des $\mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$, lorsque E décrit $\mathcal{E}$, est directe puisque la somme des $\mathcal{J}_{\mathrm{E}}$ l'est, et elle est évidemment incluse dans $\mathcal{K}_{\mathrm{F}}$, ce qui donne l'inégalité :
$\sum_{E\in\mathcal{E}} \dim(\mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}) \leqslant \dim(\mathcal{K}_{\mathrm{F}})$.
On a donc finalement, en utilisant le résultat de la question précédente :
$\dim(\mathcal{K}_{\mathrm{F}}) = \sum_{E\in\mathcal{E}} \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}})) \leqslant \sum_{E\in\mathcal{E}} \dim(\mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}) \leqslant \dim(\mathcal{K}_{\mathrm{F}})$
donc toutes ces inégalités sont en fait des égalités, soit :
$\dim(\mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}))$, puis finalement l'égalité de ces deux sous-espaces vectoriels .

6°) **a)** Soit $A \in \mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}$. On a donc : soit $A^2 = 0$, soit $A^2 \in \mathcal{B}$, et dans ce dernier cas, $\mathrm{rg}(A^2) = r = rg(A)$, ce qui donne facilement $E = \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A^2)$ et $F = \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$ d'où $A^2 \in \mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}$.

b) • Remarquons d'abord que $\in \mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}$ est non vide, puisque cette partie engendre $\mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$ qui est de dimension $\dim(E)(n - \dim(F)) = r^2 \neq 0$.
• On peut donc trouver $A \in \mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}$. On a alors :
 ◇ soit $A^2 = 0$ d'où $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$ soit $E \subset F$.
 ◇ soit $A^2 \in \mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}$. Dans ce cas, soit $X \in E \cap F = \mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Ker}(A)$; alors $X = AY$ et

$AX = 0$ impliquent $A^2Y = 0$ d'où $Y \in \mathrm{Ker}(A^2) = F = \mathrm{Ker}(A)$ d'où $X = AY = 0$. Ainsi, la somme $E+F$ est directe, et puisque $\dim(E)+\dim(F) = \dim(\mathrm{Im}(A))+\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n$; on a bien $E \oplus F = \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$.

c) Soit $F \in \mathcal{F}$. S'il n'existait pas de $E \in \mathcal{E}$ tel que $E \oplus F = \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$, alors, d'après la question précédente, on aurait , pour tout $E \in \mathcal{E}$, $E \subset F$, d'où $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{E\in\mathcal{E}} E$ serait inclus, donc égal, à F, donc il existerait $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$ soit $A = 0$ ce qui est impossible.

7°) a) • Notons d'abord que la définition de l'énoncé a bien un sens, puisque, si $A \in \mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$, on a $\mathrm{Im}(A) \subset E$.
• La linéarité de l'application $A \mapsto \hat{A}$ ne pose pas de problème.
• On a : $\dim(\mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}) = r^2 = \dim(\mathcal{M}_r(\mathbb{R}))$, donc, pour prouver que cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels, il suffit de prouver son injectivité.
• Or, si on a $\hat{A} = 0$, alors $Ae_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ donc la restriction de A à E est nulle ; puisque $A \in \mathcal{K}_{\mathrm{F}}$, la restriction de A à F est nulle également, donc $A = 0$ puisque E et F sont supplémentaires. Ainsi, le noyau de l'application $A \mapsto \hat{A}$ est réduit à $\{0\}$ et cette application est bien injective.

b) L'image par cet isomorphisme de $\mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}$, qui est une base de $\mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$, est donc une base de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. De plus, si A, B appartiennent à $\mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}$, alors $AB = 0$ ou $AB \in \mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}$ d'après VI.4.a, d'où l'on déduit facilement (puisque $\widehat{AB} = \hat{A}\hat{B}$) qu'il s'agit d'une base stable.

c) Si $A \in \mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}$, alors $\mathrm{Ker}(\hat{A}) = E \cap F = \{0\}$ donc $\mathrm{rg}(\hat{A}) = \dim(E) = r$, ce qui n'est possible, d'après VI.3, que si $r = 1$.

d) On a déjà vu : $r^2 = \dim(\mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{card}(\mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}})$.
Donc $\mathrm{card}(\mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}) = 1$, et, si A est l'unique élément de cet ensemble, on a vu que $A^2 \in \mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}$ d'où $A^2 = A$, d'où le résultat.
