DUALITÉ

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on rappelle que l'ensemble des formes linéaires sur E forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois usuelles, appelé espace dual de E, et noté E^*.

On admettra que, même si E n'est pas de dimension finie, tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E.

PARTIE A

Soit A une partie non vide de E. On notera A° l'ensemble des formes linéaires $\varphi \in E^*$ telles que : $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in A$ (A° s'appelle l'orthogonal de A dans E^*).
Vérifier les propriétés suivantes :

1. Pour toute partie A non vide de E, A° est un sous-espace vectoriel de E^*.

2. Pour toutes parties A et B non vides de E, on a : $A \subset B \;\Rightarrow\; B^\circ \subset A^\circ$.

3. Pour toutes parties A et B non vides de E, on a : $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

4. Pour toute partie A non vide de E, $A^\circ = (\text{Vect}(A))^\circ$.

5. Si A est un hyperplan de E, A° est une droite vectorielle de E^*.

6. Si A est un sous-espace vectoriel de E, on a l'équivalence : $A^\circ = \{0\} \iff A = E$ (*pour démontrer l'implication $\Rightarrow$, on pourra raisonner par l'absurde, et utiliser le fait que si A est strictement inclus dans E, il existe un hyperplan de E contenant A*).

7. Si A est un sous-espace vectoriel de E, on a l'équivalence : $A^\circ = E^* \iff A = \{0\}$

PARTIE B

Soit A' une partie non vide de E^*. On notera A'° l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que : $\varphi(x) = 0$ pour tout $\varphi \in A'$ (A'° s'appelle l'orthogonal de A' dans E).
Vérifier les propriétés suivantes :

1. Pour toute partie A' non vide de E^*, A'° est un sous-espace vectoriel de E.

2. Pour toutes parties A' et B' non vides de E^*, on a : $A' \subset B' \;\Rightarrow\; B'^\circ \subset A'^\circ$.

3. Pour toutes parties A' et B' non vides de E^*, on a : $(A' \cup B')^\circ = A'^\circ \cap B'^\circ$.

4. Pour toute partie A' non vide de E^*, $A'^\circ = (\text{Vect}(A'))^\circ$.

5. Pour toute partie non vide A de E, on a : $A \subset (A^\circ)^\circ$.

6. Si A' est un sous-espace vectoriel de E^*, on a l'implication : $A' = E^* \;\Rightarrow\; A'^\circ = \{0\}$.
Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que l'implication réciproque est fausse (*on pourra se placer dans $E = \mathbb{R}[X]$*).

PARTIE C

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
On appelle transposée de u l'application : $\left\{ \begin{array}{ll} {}^t u : & F^* \to E^* \\ & \varphi \mapsto \varphi \circ u \end{array} \right.$.

1. Montrer que ${}^t u$ est une application linéaire de F^* dans E^*.

2. Montrer que l'application : $u \mapsto {}^t u$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F^*, E^*)$.

3. Soient F, G, H trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que : ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.

4. Montrer que : ${}^t(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_{E^*}$.

5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et A un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Montrer que A° est stable par ${}^tu$.

6. Montrer que, si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, alors ${}^tu \in \mathcal{L}(F^*,E^*)$ est bijective et : $({}^tu)^{-1} = {}^t(u^{-1})$.

7. a) Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que : $\mathrm{Ker}\ ({}^tu) = (\mathrm{Im}\ u)^\circ$.
b) En déduire : u surjective $\iff$ ${}^tu$ injective.

8. a) Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que : $\mathrm{Im}\ ({}^tu) = (\mathrm{Ker}\ u)^\circ$.
b) En déduire : u injective $\iff$ ${}^tu$ surjective.

9. On note E^{**}, appelé <u>bidual</u> de E, le dual de E^*.

a) Soit $x \in E$. Démontrer que, pour $\varphi \in E^*$, l'application $\left\{ \begin{array}{ll} \hat{x} : & E^* \to \mathbb{K} \\ & \varphi \mapsto \varphi(x) \end{array} \right.$ est linéaire (*ainsi,* $\hat{x}$ *appartient à* E^{**}).

b) Démontrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ll} \psi : & E \to E^{**} \\ & x \mapsto \hat{x} \end{array} \right.$ est linéaire.

c) Démontrer que ψ est injective (ψ *est appelée <u>l'injection canonique</u> entre* E *et son bidual*).

<u>PARTIE D</u>

On suppose dans toute cette partie que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et on note n la dimension de E.

1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on note e_i^* la i-ème forme linéaire coordonnée, c'est-à-dire l'application qui à tout vecteur x de E associe sa i-ème coordonnée dans $\mathscr{B}$:

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ avec } x_i \in \mathbb{K},\ e_i^*(x) = x_i\,.$$

Montrer que la famille $\mathscr{B}^* = ({e_1}^*, {e_2}^*, \dots, {e_n}^*)$ est une base de E^* (cette base est appelée <u>base duale</u> de la base $\mathscr{B}$), et que l'on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2\ ,\ {e_i}^*(e_j) = \delta_{ij}\,.$$

2. Démontrer que ψ est un isomorphisme de E sur E^{**}. En déduire que, pour toute base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)$ de E^*, il existe une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E (*appelée base <u>ante-duale</u>*) telle que $\varphi_i = {e_i}^*$ pour tout i.

3. Démontrer que, si F est un sous-espace vectoriel de E, alors : $\dim(F) + \dim(F^\circ) = \dim(E)$ (*si* $p = \dim(F)$*, on pourra utiliser une base* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ *de* E *telle que* $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ *soit une base de* F).

4. Démontrer que, si F' est un sous-espace vectoriel de E^*, alors : $\dim(F') + \dim(F'^\circ) = \dim(E)$.

5. En déduire que, si F est un sous-espace vectoriel de E, $(F^\circ)^\circ = F$.

6. a) Montrer que, si A et B sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a : $(A \cap B)^\circ = A^\circ + B^\circ$.
b) En déduire que, si $(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_p)$ et φ sont des formes linéaires sur E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) φ est combinaison linéaire de $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_p$.

(ii) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\ (\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}\ (\varphi)$.

7. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
a) Montrer que u et ${}^tu$ ont même rang.
b) Si $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont deux bases de E et F respectivement, et si ${\mathcal{B}^*}_E$ et ${\mathcal{B}^*}_F$ sont leurs bases duales, et si M est la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, quelle est la matrice de ${}^tu$ dans les bases ${\mathcal{B}^*}_F$ et ${\mathcal{B}^*}_E$?
c) En déduire que, si M est une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$, M et ${}^tM$ ont même rang.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆