IMAGES ET NOYAUX ITÉRÉS (d'après INA 1994)

Notations valables pour tout le problème :

• n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$.

• f est un endomorphisme de E.

• On pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$ (application identique de E) et, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 , on pose $f^k = f \circ f^{k-1}$.

PARTIE A :

Le but de cette partie est de démontrer que, pour tout endomorphisme f de E, il existe un entier p qui vérifie :

$$(1) \qquad \begin{cases} 1 \leqslant p \leqslant n \\ E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p \end{cases}$$

1. Dans cette question, f est un endomorphisme bijectif de E. Donner une valeur de p satisfaisant (1). Justifier la réponse.

2. *Exemple 1 :*
Dans cette question, $n = 3$, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à une base (e_1, e_2, e_3) et f est l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

a) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$. Peut-on choisir $p = 1$?

b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f^2$ et une base de $\operatorname{Im} f^2$. Justifier l'égalité $E = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Im} f^2$.

3. *Exemple 2*
Dans cette question, $n = 4$, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ rapporté à une base (e_1, e_2, e_3, e_4), m est un paramètre réel et f est l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$. Peut-on choisir $p = 1$? On discutera selon les valeurs de m.

b) Déterminer le plus petit entier p vérifiant (1).

4. *Étude du cas général*
Dans cette question, on suppose que l'endomorphisme f n'est pas bijectif.

a) Soit k un entier naturel, justifier : $\begin{cases} \operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1} \\ \operatorname{Im} f^k \supset \operatorname{Im} f^{k+1} \end{cases}$

b) Pour tout entier naturel k, on note a_k la dimension de $\operatorname{Ker} f^k$. Montrer que la suite (a_k) est croissante.

c) Soit F l'ensemble des entiers naturels k tels que $a_k = a_{k+1}$. Montrer que F est un ensemble non vide.

d) En déduire l'existence d'un entier p, supérieur ou égal à 1, qui vérifie les deux conditions :
pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant p-1$, on a : $\operatorname{Ker} f^k \neq \operatorname{Ker} f^{k+1}$ et $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$.

e) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à p, on a $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$.

f) Déduire de ce qui précède l'égalité : $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$.

Dans toute la suite du problème, p désigne le plus petit entier vérifiant (1) et on admet que c'est celui qui a été obtenu à la question 4 de la partie A.

PARTIE B :

Dans cette partie, on étudie deux cas particuliers.

1. a) On suppose $p = n$. Montrer que f^n est l'endomorphisme nul. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} f$?

b) *Un exemple*
Dans cette question, $n = 3$, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à une base (e_1, e_2, e_3) et f est l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que : $\begin{cases} f(\varepsilon_1) = 0 \\ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 \end{cases}$

Écrire la matrice de f dans cette base et vérifier que $p = 3$.

2. On suppose ici que p est supérieur ou égal à 2 et que l'on a de plus : $\operatorname{Ker} f^p = E$.

a) Montrer que pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant p - 1$, on peut définir un sous-espace vectoriel, non réduit au vecteur nul, supplémentaire de $\operatorname{Ker} f^k$ dans $\operatorname{Ker} f^{k+1}$.

b) En déduire l'existence d'une base de E dans laquelle f est représentée par une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes de la diagonale sont nuls.

c) On reprend l'exemple de la question 3 de la partie A, avec $m = 0$.
Déterminer, par permutation des vecteurs e_1, e_2, e_3 et e_4, une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A_0 a les propriétés définies à la question 2.b .

<u>PARTIE C :</u>

Le but de cette partie est la détermination de p lorsque f vérifie une certaine équation polynômiale.

a désigne un réel non nul et f est un endomorphisme de E qui vérifie :

$$(2) \qquad \begin{cases} f \neq a\mathrm{Id}_E \\ f^{n-1} \neq 0 \\ f^{n-1} \circ (f - a\mathrm{Id}_E) = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N},\ (0 \leqslant k \leqslant n-2) \Longrightarrow f^k \circ (f - a\mathrm{Id}_E) \neq 0 \end{cases}$$

1. Question réservée aux 5/2 Montrer que 0 et a sont des valeurs propres de f et que ce sont les seules.

2. a) Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $\operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E) = \{0\}$.

b) En déduire que $\operatorname{Ker} f^{n-1}$ et $\operatorname{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E (on pourra considérer leurs dimensions et utiliser l'égalité $f^{n-1} \circ (f - a\mathrm{Id}_E) = 0$).

3. On se propose ici de démontrer l'égalité $p = n - 1$.

a) Supposant vérifiée l'hypothèse $p < n-1$, justifier qu'alors $\operatorname{Ker} f^p$ et $\operatorname{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E. En déduire une contradiction avec (2).

b) Montrer que p ne peut être égal à n et conclure.