CORRIGÉ : MATRICES DONT LES VALEURS PROPRES SONT SUR LA DIAGONALE (CCP MP 2008)

I. EXEMPLES

1. a) Le polynôme caractéristique de $M(\alpha)$ est

$$\begin{aligned}\chi_{M(\alpha)} &= \begin{vmatrix} 1-X & -1 & \alpha \\ 0 & 2-X & -\& \\ 1 & 1 & 2-\alpha-X \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 2-X & -1 & \alpha \\ -2+X & 2-X & -\alpha \\ 0 & 1 & 2-\alpha-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)\begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ -1 & 2-X & -\alpha \\ 0 & 1 & 2-\alpha \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=} (2-X)\begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 1 & 2-\alpha-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)\begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 1 & 2-\alpha-X \end{vmatrix} = (2-X)(1-X)((2-\alpha)-X)\end{aligned}$$

Les racines de $\chi_{M(\alpha)}$, c'est-à-dire les valeurs propres de $M(\alpha)$, sont bien les éléments diagonaux de $M(\alpha)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } \alpha\text{, la matrice } M(\alpha) \text{ est une matrice à diagonale propre.}}$$

b) – Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ alors les valeurs propres de $M(\alpha)$ sont deux à deux distinctes, $M(\alpha)$ est diagonalisable.

– Si $\alpha = 0$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 1 et 2 de multiplicité 2.
$\operatorname{rg}(M(0) - 2I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$, la dimension de $E_2 = \operatorname{Ker}(M(0) - 2I_3)$ est donc 2 et $M(0)$ est diagonalisable.

– Si $\alpha = 1$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1.
$\operatorname{rg}(M(1) - I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, la dimension de E_1 est donc 1 et $M(0)$ n'est pas diagonalisable.

En conclusion :

$$\boxed{M(\alpha) \text{ est diagonalisable si et seulement si } \alpha \neq 1.}$$

2. Un calcul rapide donne $\chi_A = -X^3 - X$. χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas à diagonale propre.}}$$

3. $*$ Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $\chi_A = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$.
La matrice A est à diagonale propre si et seulement si $\chi_A = (a-X)(d-X)$, c'est à dire si et seulement si $bc = 0$.

$$\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est donc l'ensemble des matrices triangulaires.}}$$

$*$ L'application qui à toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe le réel bc est continue (polynomiale) ; $\mathcal{E}_2$ est l'image réciproque de $\{0\}$, qui est une partie fermée de $\mathbb{R}$, par cette application donc, d'après un célèbre théorème du cours :

$$\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est donc une partie fermée de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

II. TEST DANS LE CAS $n = 3$

4. $*$ Une matrice est inversible si et seulement si 0 n'en est pas valeur propre (cf. cours) ; dans le cas d'une MDP on obtient donc

$$\boxed{\text{Une matrice à diagonale propre est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls}}$$

* Il suffit de prendre une matrice triangulaire, non diagonale et inversible : par exemple (juste parce que l'énoncé demande le calcul !) :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont toutes deux des MDP.

5. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. A est une matrice à diagonale propre si et seulement si son polynôme caractéristique est égal à $(a_{11} - X)(a_{22} - X)(a_{33} - X)$.
En développant simplement ces deux polynômes et en identifiant leurs coefficients on trouve que

$$\boxed{A \text{ est une matrice à diagonale propre si et seulement si } \det A = \prod_{i=1}^{3} a_{ii} \text{ et } a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0}$$

6. a) Version Maple :

```
restart; with(LinearAlgebra);
MDP := proc (A)
return (Determinant(A) = A[1, 1]*A[2, 2]*A[3, 3] and
       A[1, 2]*A[2, 1]+A[1, 3]*A[3, 1]+A[2, 3]*A[3, 2] = 0)
end proc;
```

b) puis le calcul :

```
A := Matrix([[-1, 0, 3], [-3, 2, 3], [0, 0, 2]]):
MDP(A);
                                true

B := Matrix([[5, 2, 2], [-8, 4, 0], [1, 1, 4]]):
MDP(B);
                               false

MDP(A^(-1));
                                true
```

Au final, on trouve :

$$\boxed{\text{Les matrices à diagonale propre sont } A_1,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6 \text{ et } A_8}$$

c) Dans la liste précédente, seules A_1 et A_4 sont des MDP ainsi que leurs inverses ; cela permet de conjecturer qu'une condition serait :

$$\boxed{a_{12}a_{21} = a_{13}a_{31} = a_{23}a_{32} = 0}$$

d) * Cette condition n'est cependant pas *nécessaire* ; en effet, si l'on considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ on obtient grâce à Maple, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ et :

```
A := Matrix([[2, 1, 1], [0, 1, -1], [1, 1, 1]]);
MDP(A);
                                true

B := 1/A;
MDP(B);
                                true
```

* De même, la condition $a_{12}a_{21} = 0$ *ou* $a_{13}a_{31} = 0$ *ou* $a_{23}a_{32} = 0$ n'est, elle, pas suffisante comme le montre l'exemple de la matrice A_3, qui est inversible et MDP mais pas son inverse !

* Bref, tout ce que l'on peut démontrer, c'est :

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est inversible et MDP et si } a_{12}a_{21} = a_{13}a_{31} = a_{23}a_{32} = 0,\ \textit{alors } A^{-1} \text{ est aussi MDP.}}$$

Démonstration :

– Le cas d'une matrice triangulaire est immédiat.

– Il suffit donc d'examiner le cas de matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & c & \gamma \end{pmatrix}$, avec $\alpha\beta\gamma \neq 0$ (il y a d'autres formes, mais la démonstration est similaire).

Il suffit alors simplement de calculer A^{-1} et de vérifier que c'est bien une MDP ; et Maple fait cela très bien...

On trouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -\dfrac{-cb+\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma} & -\dfrac{b}{\alpha\gamma} \\ 0 & \beta^{-1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{c}{\beta\gamma} & \gamma^{-1} \end{pmatrix}$.

III. EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

7. Soit $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$. On note r et s les dimensions des matrices carrées A et C.

Alors $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{bmatrix}$.

En développant r fois par rapport à la première colonne, on montre que

$$\det \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det C$$

et en développant s fois par rapport à la dernière ligne, on montre que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{bmatrix} = \det A\,.$$

$\boxed{\text{On a donc bien } \det M = \det A \det C.}$

8. a) $*$ Si $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ est une matrice par blocs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et si les matrices A et C sont des matrices carrées d'ordre r et s à diagonale propre, alors M est une matrice à diagonale propre.

En effet, d'après la question précédente,

$$\chi_M = \det \begin{bmatrix} A - XI_r & B \\ 0 & C - XI_s \end{bmatrix} = \det(A - XI_r)\det(C - XI_s) = \chi_A \chi_C\,.$$

Les matrices A et C étant à diagonale propre, leurs valeurs propres sont leurs éléments diagonaux, et les valeurs propres de M étant la réunion de celles de A et de B sont donc aussi ses éléments diagonaux.

$*$ On prend alors par exemple $A = (1)$ (matrice à diagonale propre car triangulaire), $B = (111)$ et $C = A_5$ (définie à la question 6, matrice à diagonale propre dont tous les termes sont non nuls)

On obtient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

$\boxed{M \text{ est à diagonale propre et contient bien treize réels non nuls.}}$

b) Soit $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ une matrice par blocs de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ où les matrices A, B et C sont des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ne contiennent aucun terme nul. De même qu'en a), $\chi_M = \chi_A \chi_C$.

Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

Si a ou d est valeur propre de A, alors χ_A est scindé et $\operatorname{tr} A = a + d$, les valeurs propres de A sont alors a et d, la matrice A est alors à diagonale propre et d'après la question 3. c'est une matrice triangulaire ce qui est impossible car la matrice A ne contient aucun terme nul.

De même pour B.

Donc, les valeurs propres de A sont e et h et les valeurs propres de C sont a et d.
On en déduit $\chi_A = (X-e)(X-h)$ et $\chi_C = (X-a)(X-d)$.

En développant ces polynômes et en identifiant leurs coefficients, on obtient les relations : $\begin{cases} a+d = e+h \\ ad-bc = eh \\ eh-gf = ad \end{cases}$

Il suffit de trouver des réels a, b, c, d, e, f, g et h tous non nuls vérifiant ces équations et de prendre une matrice B quelconque ne contenant aucun terme nul.

Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On obtient : } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.}$$

IV. QUELQUES PROPRIETES

9. On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Les valeurs propres de A sont a_{11}, a_{22} ... a_{nn}, puisque A est une MDP.
Les valeurs propres de $aA + bI_n$ sont alors $a.a_{11} + b$, $a.a_{22} + b$ ... $a.a_{nn} + b$, puisque si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul est tel que $AV = \lambda V$, on a $(aA + bI_n)V = (a\lambda + b)V$.
Ce sont les termes diagonaux de $aA + bI_n$,

$$\boxed{aA + bI_n \text{ est donc une matrice à diagonale propre.}}$$

Les termes diagonaux et les valeurs propres d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes, et ${}^t(aA + bI_n) = a\,{}^tA + bI_n$,

$$\boxed{a\,{}^tA + bI_n \text{ est donc une matrice à diagonale propre.}}$$

10. Soit $A \in \mathcal{E}_n$.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_p = A - \dfrac{1}{p} I_n$.
D'après la question précédente, U_p est une matrice à diagonale propre.
D'autre part, $\det U_p = \chi_A\left(\dfrac{1}{p}\right)$ est nul si et seulement si $d\frac{1}{p}$ est valeur propre de A. U_p est donc inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de p.
Il existe donc un entier p_0 tel que la suite $(U_p)_{p \geqslant p_0}$ soit une suite d'éléments de G_n. Cette suite converge vers A lorsque $p \to +\infty$. Toute matrice de $\mathcal{E}_n$ est donc limite d'une suite de matrices de G_n, ce qui revient à dire, d'après la caractérisation séquentielle de l'adhérence, que l'adhérence de G_n est $\mathcal{E}_n$ ou encore :

$$\boxed{G_n \text{ est dense dans } \mathcal{E}_n.}$$

11. a) Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable et aussi trigonalisable, mais d'après la question 3., elle n'est pas à diagonale propre.

$$\boxed{\text{Une matrice trigonalisable n'est pas nécessairement à diagonale propre.}}$$

b) Par définition, le polynôme caractéristique d'une matrice à diagonale propre est scindé, une telle matrice est donc trigonalisable.

$$\boxed{\text{Une matrice à diagonale propre est trigonalisable}}$$

c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Si A est semblable à une matrice B à diagonale propre, alors $\chi_A = \chi_B$ et χ_B est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, donc χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Si χ_A est scindé, alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, or toute matrice triangulaire est à diagonale propre donc A est semblable à une matrice à diagonale propre.

$$\boxed{A \text{ est semblable à une matrice à diagonale propre si et seulement si } \chi_A \text{ est scindé.}}$$

12. $*$ Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme toute matrice triangulaire est à diagonale propre, il suffit d'écrire A comme une somme de deux matrices triangulaires, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

$*$ Pour tout $n \geqslant 2$ il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas à diagonale propre, par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ (je vous laisse le soin de vérifier que cette matrice n'est pas une MDP).
Cette matrice s'écrit comme somme de deux matrices à diagonale propre, donc

$$\boxed{\mathcal{E}_n \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

V. MATRICES SYMÉTRIQUES ET MATRICES ANTISYMÉTRIQUES

13. $\operatorname{tr}({}^tAA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ (la démonstration est dans le cours sur les espaces préhilbertiens réels ; à savoir refaire...).

14. a) A est une matrice réelle et symétrique donc il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PD{}^tP$.
$\operatorname{tr}({}^tAA) = \operatorname{tr}(PD{}^tPPD{}^tP) \underset{\text{car } {}^tPP=I_n}{=} \operatorname{tr}(PDD{}^tP) = \operatorname{tr}(D^2)$ (car $PD^{2t}P$ semblable à D^2 et deux matrices semblables ont la même trace.)
Or $\operatorname{tr}({}^tAA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ et $\operatorname{tr}(D^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.}$$

b) Si de plus A est une matrice à diagonale propre, alors les valeurs propres de A sont a_{11}, a_{22} ... a_{nn}.
Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_{ij}^2 = 0$, la matrice A est une matrice diagonale.
Réciproquement, toute matrice diagonale est à diagonale propre.

$$\boxed{\text{Les matrices symétriques réelles à diagonale propre sont donc les matrices diagonales.}}$$

15. a) A est antisymétrique, donc tous ses éléments diagonaux sont nuls et comme elle est à diagonale propre, son polynôme caractéristique est scindé et toutes ses valeurs propres sont nulles. On a donc $\chi_A(X) = (-1)^n X^n$ et par le théorème de Cayley-Hamilton

$$\boxed{A^n = 0.}$$

$({}^tAA)^n = (-AA)^n = (-1)^n A^{2n} = 0$.

$$\boxed{({}^tAA)^n = 0.}$$

b) ${}^tAA$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable.
$({}^tAA)^n = 0$ donc toutes les valeurs propres de ${}^tAA$ sont nulles.
On en déduit

$$\boxed{{}^tAA = 0.}$$

c) De ce qui précède, on déduit que $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$.

$$\boxed{A \text{ est donc la matrice nulle.}}$$

VI. DIMENSION MAXIMALE D'UN ESPACE VECTORIEL INCLUS DANS $\mathcal{E}_n$

16. Si $A = \sum_{i,j} a_{i,j} E_{i,j}$ est antisymétrique, on a $A = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j}(E_{i,j} - E_{j,i})$, donc la famille $\{E_{i,j} - E_{j,i} \ , \ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ est génératrice de $\mathcal{A}_n$.

Il est facile de vérifier qu'elle est libre ; c'est donc une base de $\mathcal{A}_n$; son cardinal est le nombre de couples (i, j) tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$ c'est-à-dire $\binom{n}{2}$ et finalement

$$\boxed{\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}.}$$

(tout cela est dans le cours...)

17. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$.
De la question 15., on déduit $F \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$.
Donc, d'après la formule de Grassmann, $\dim F + \dim \mathcal{A}_n = \dim(F + \mathcal{A}_n) \leqslant \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$.

On en déduit $\dim F \leqslant n^2 - \dim \mathcal{A}_n = n^2 - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$$\boxed{\dim F \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.}$$

De plus, le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures est de dimension exactement $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et il est inclus dans $\mathcal{E}_n$, donc :

$$\boxed{\text{La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel } F \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } F \subset \mathcal{E}_n \text{ est donc } \frac{n(n+1)}{2}.}$$

18. On prend pour F l'ensemble des matrices M de la forme $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure, soit M de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & m_{32} & m_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & m_{n2} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble de ces matrices est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ qui n'est pas constitué uniquement de matrices triangulaires.
Les matrices A et C sont à diagonale propre et d'après ce que l'on a vu dans la question 8., on en déduit que M est à diagonale propre et que donc $F \subset \mathcal{E}_n$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{On a trouvé un sous-espace vectoriel } F \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } F \subset \mathcal{E}_n \text{, de dimension maximale} \\ \text{mais tel que } F \text{ ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulaires.}\end{array}}$$