CORRIGÉ DM N°2 : MINES-PONTS PC 2014

1 - Traces et projecteurs

Cette partie est essentiellement constituée de questions de cours classiques.

1. $\mathrm{tr}(\mathbb{AB}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{AB})_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,i}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{j,i}a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}(\mathbb{BA})_{j,j} = \mathrm{tr}(\mathbb{BA})$.

2. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de X. Soient Q la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. On a alors :

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}'} = Q^{-1}\mathbb{T}_{\mathscr{B}}Q\,.$$

En appliquant la question précédente avec $\mathbb{A} = Q^{-1}\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ et $\mathbb{B} = Q$, on obtient :

$$\boxed{\mathrm{tr}(\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}) = \mathrm{tr}(QQ^{-1}\mathbb{T}_{\mathscr{B}}) = \mathrm{tr}(\mathbb{T}_{\mathscr{B}})\,.}$$

3. Pour tout $x \in X$, on peut écrire : $x = (x - P(x)) + P(x)$; or $P(x - P(x)) = 0$ puisque $P^2 = P$ ce qui prouve que $x - P(x) \in N(P)$. Comme $P(x)$ est élément de $R(P)$, on vient de vérifier que $X = R(P) + N(P)$.

De plus, si $x \in R(P) \cap N(P)$ on a $P(x) = 0$ et $\exists y \in X$ tq $x = P(y)$ d'où $x = P(P(y)) = P(x) = 0$. Ainsi $R(P) \cap N(P) = \{0\}$ donc

$$\boxed{X = R(P) \oplus N(P)\,.}$$

(*on pouvait aussi ici utiliser le théorème du rang puisque X est supposé de dimension finie, mais le résultat est en fait vrai en dimension quelconque*).

4. Soit x appartenant à $R(P)$. Il existe y tel que $x = P(y)$ donc

$$P(x) = P(P(y)) = P^2(y) = P(y) = x\cdot$$

Ainsi la restriction de P à $R(P)$ est l'application identique, donc si l'on note r le rang de P, dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition en somme directe de la question précédente :

$$\mathbb{P}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donc

$$\boxed{\mathrm{tr}\,P = \mathrm{tr}(\mathbb{P}_{\mathscr{B}}) = r = \mathrm{rg}\,P\,.}$$

5. On a vu précédemment que si $x \in R(P)$, $P(x) = x$ donc $P'(x) = 0$ d'où $R(P) \subset N(P')$. Réciproquement, si x est élément de $N(P')$, $P'(x) = 0$ d'où $P(x) = x$ puis $x \in R(P)$. Aussi

$$\boxed{R(P) = N(P')\,.}$$

On vérifie que P' est aussi un projecteur : comme P et I commutent,

$$P'^2 = (I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P = P'\,.$$

En échangeant les rôles de P et de P' (puisque $P = I - P'$), on obtient aussi

$$\boxed{R(P') = N(P)\,.}$$

6. Si $\mathscr{B}_F$ est une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G, alors la réunion de $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est une famille génératrice de $F + G$.

Donc la dimension de $F+G$ est inférieure ou égale à $\mathrm{card}(\mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G) = \mathrm{card}\,\mathscr{B}_F + \mathrm{card}\,\mathscr{B}_G - \mathrm{card}(\mathscr{B}_F \cap \mathscr{B}_G)$ d'où

$$\boxed{\dim(F + G) \leqslant \mathrm{card}\,\mathscr{B}_F + \mathrm{card}\,\mathscr{B}_G = \dim F + \dim G\,.}$$

(*on pouvait aussi utiliser directement la formule de Grassmann*).

7. Procédons par récurrence sur le nombre de projecteurs m intervenant dans la somme.

- Pour $m = 1$, $S = P_1$ donc $\operatorname{tr} S = \operatorname{rg} S$ d'où $\operatorname{tr} S \in \mathbb{N}$ et $\operatorname{tr} S \geqslant \operatorname{rg} S$.
- Supposons la propriété vraie à l'ordre $m-1 \geqslant 1$. Soit $S' = \sum_{i=1}^{m-1} P_i$ donc $S = S' + P_m$. Par hypothèse de récurrence $\operatorname{tr} S' \in \mathbb{N}$ et $\operatorname{tr} S' \geqslant \operatorname{rg} S'$. La trace étant linéaire, $\operatorname{tr} S = \operatorname{tr} S' + \operatorname{tr} P_m \in \mathbb{N}$ comme somme de deux entiers. De plus, pour tout x de X : $S(x) = S'(x) + P_m(x)$ donc $R(S) \subset R(S') + R(P_m)$. En utilisant la question précédente et $\operatorname{tr}(P_m) = \operatorname{rg}(P_m)$:

$$\operatorname{rg}(S) = \dim R(S) \leqslant \operatorname{rg}(S') + \operatorname{rg}(P_m) \leqslant \operatorname{tr}(S') + \operatorname{tr}(P_m) = \operatorname{tr}(S).$$

On a donc prouvé par récurrence que pour tout entier naturel m :

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{m} P_i \Longrightarrow \operatorname{tr} S \in \mathbb{N} \text{ et } \operatorname{tr} S \geqslant \operatorname{rg} S.}$$

2 - Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur P est égal à 1.

8. Soit f_1 un vecteur non nul dans $R(P)$: c'est donc une base de $R(P)$ puisque $\operatorname{rg} P = 1$. Comme $P \circ T(f_1) = P\big(T(f_1)\big)$, $P \circ T(f_1)$ appartient à $R(P)$. Donc :

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, P \circ T(f_1) = \mu f_1$$

Or pour tout x de X, $P(x)$ est colinéaire à f_1 : $P(x) = \alpha f_1$ donc

$$P \circ T \circ P(x) = P \circ T(\alpha f_1) = \mu \alpha f_1 = \mu P(x)$$

ce qui prouve que :

$$\boxed{P \circ T \circ P = \mu P.}$$

9. Puisque $P(f_1) = f_1$ on a $P\big[T(f_1) - \mu f_1\big] = PTP(f_1) - \mu P(f_1) = 0$ d'après la question précédente donc $T(f_1) - \mu f_1$ appartient à $N(P) = \operatorname{Vect}\{f_2, \ldots, f_n\}$ et cela justifie la forme de la première colonne de $\mathbb{T}_{\mathscr{C}}$, les autres colonnes étant quelconques.

10. Par définition, la matrice de P' dans la base $\mathscr{C}$ est $\mathbb{P}'_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{bmatrix}$. Si on écrit par blocs $\mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} \mu & L \\ C & \mathbb{B} \end{bmatrix}$, un calcul en blocs donne alors :

$$\mathbb{P}'_{\mathscr{C}} \mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ C & \mathbb{B} \end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \mathbb{P}'_{\mathscr{C}} \mathbb{T}_{\mathscr{C}} \mathbb{P}'_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \mathbb{B} \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$P' \circ T \circ P' = \alpha P' \Longleftrightarrow \mathbb{P}'_{\mathscr{C}} \mathbb{T}_{\mathscr{C}} \mathbb{P}'_{\mathscr{C}} = \alpha \mathbb{P}'_{\mathscr{C}} \Longleftrightarrow \mathbb{B} = \alpha \mathbb{I}_{n-1}.$$

On a ainsi vérifié par contraposition que :

$\boxed{\mathbb{B} \text{ n'est pas la matrice d'une homothétie si et seulement si } P' \circ T \circ P' \text{ n'est pas proportionnel à } P'.}$

Rem : l'énoncé ne demandait qu'une implication.

3- Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l 'endomorphisme T n'est pas une homothétie.

11. Prouvons le résultat demandé par contraposition.On suppose que pour tout x, $\{x, T(x)\}$ est une famille liée ce qui équivaut à dire que pour tout x non nul, il existe α_x réel tel que $T(x) = \alpha_x x$.

Soit u un vecteur non nul.

- Si x est colinéaire à u, il existe λ tel que $x = \lambda u$ et on a :

$$\alpha_x x = T(x) = \lambda T(u) = \lambda \alpha_u u = \alpha_u x$$

d'où $\alpha_x = \alpha_u$.

- Si x n'est pas colinéaire à u, $u+x$ est non nul et on a alors :

$$T(x+u) = T(x) + T(u) = \alpha_x x + \alpha_u u = \alpha_{x+u}(u+x)\,.$$

La famille $\{u,x\}$ étant libre : $\alpha_u = \alpha_{x+u} = \alpha_x$.

- Cela prouve qu'il existe α tel que pour tout x (l'égalité étant triviale pour le vecteur nul), $T(x) = \alpha x$ soit T est une homothétie.

On a donc montré par contraposition

$\boxed{\text{Si } T \text{ n'est pas une homothétie, il existe un vecteur } x \in X \text{ tel que } x \text{ et } T(x) \text{ ne soient pas liés.}}$

12. Soit e_1 un élément tel que e_1 et $T(e_1)$ ne soient pas colinéaires (un tel vecteur existe par la question précédente). On peut compléter cette famille libre en une base $\mathscr{B} = \{e_1, T(e_1), e_3, \ldots, e_n\}$ de X et dans cette base la matrice de T a la forme recherchée.

13. Procédons par récurrence sur n.
- Initialisation : $n = 2$. On a trouvé dans la question précédente une base $\mathscr{B}$ telle que :

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix} \;;$$

or $\operatorname{tr} T = a$ donc $a = 0$. La base $\mathscr{B}$ convient.
- Supposons la propriété réalisée à l'ordre $n-1 \geqslant 1$.On a montré dans la question précédente l'existence d'une base $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ dans laquelle la matrice $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ est de la forme suivante :

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \text{x} & \text{x} & \cdots & \text{x} \\ 1 & & & & \\ 0 & & \mathbb{A} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{A} \in \mathscr{M}_{n-1}$. Comme $\operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}(\mathbb{A})$, $\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = 0$.

Si $\mathbb{A}$ est de la forme $\alpha \mathbb{I}_{n-1}$, $\alpha = 0$ et la base $\mathscr{B}$ convient.

Sinon soit T_1 l'endomorphisme de $X_1 = \operatorname{Vect}\{e_2, \ldots, e_n\}$ de matrice $\mathbb{A}$ dans la base $\mathscr{B}_1 = \{e_2, \ldots, e_n\}$. Cet endomorphisme n'est pas une homothétie et est de trace nulle.

Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathscr{B}_1' = \{e_2', \ldots, e_n'\}$ de X_1 dans laquelle $\mathbb{A}_1$, matrice de T_1, a une diagonale principale formée de 0.
Soit alors $\mathscr{B}' = \{e_1, e_2', \ldots, e_n'\}$ base de X. Dans la base $\mathscr{B}'$, la matrice $\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}$ de T n'a que des 0 sur la diagonale.
En effet :

- $T(e_1) \in X_1$ ce qui justifie que dans $\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}$ il y ait un 0 en ligne 1 colonne 1 ;
- et si $x \in X_1, T(x) = \alpha_x e_1 + T_1(x)$ d'après la forme de $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$; aussi, la composante de $T(e_i')$ sur e_i' est la même que celle de $T_1(e_i')$; elle est donc nulle.

Tous les termes diagonaux de $\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}$ sont donc nuls et on a donc montré par récurrence que

$\boxed{\text{il existe une base dans laquelle la matrice de } T \text{ n'a que des } 0 \text{ sur sa diagonale.}}$

(*Rem : pour montrer que $\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}$ n'a que des zéros sur la diagonale, on pouvait aussi faire une démonstration matricielle en utilisant les formules de changement de base ; voir le principe dans la démonstration de la question 16*).

14. Soit $T' = T - t_1 I$. Cet endomorphisme n'est pas une homothétie puisque T n'en est pas une. Par la question 12, il existe $\mathscr{B}$ telle que

$$\mathbb{T}'_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

où $a = \operatorname{tr} T' = \operatorname{tr} T - t_1 \operatorname{tr} I = (t_1 + t_2) - 2t_1 = t_2 - t_1$ d'où

$$\boxed{\mathbb{T}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & t_2 - t_1 \end{pmatrix} + t_1 \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} t_1 & b \\ 1 & t_2 \end{pmatrix}}$$

15. D'après la propriété admise par l'énoncé, il existe un projecteur L de X de rang 1, tel que d'une part $LTL = t_1 L$ et d'autre part $L'TL'$ ne soit pas proportionnel à $L' = I - L$. Par la question 9, dans une base $\mathscr{C}$ adaptée à la décomposition $E = R(L) \oplus N(L)$, la matrice de T sera

$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} t_1 & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \mathrm{x} & & & \end{pmatrix}.$$

et par la question 10 comme $L'TL'$ n'est pas proportionnel à I, $\mathbb{B}$ n'est pas une matrice d'homothétie.

16. La récurrence a été initialisée pour $n = 2$ en question 14.
Supposons la propriété réalisée à l'ordre $n-1 \geqslant 2$ et démontrons la à l'ordre n. Par la question précédente, il existe une base $\mathscr{C} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ telle que :

$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} t_1 & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \mathrm{x} & & & \end{pmatrix}.$$

où $\mathbb{B}$ n'est pas une matrice d'homothétie. De plus $\mathrm{tr}(\mathbb{B}) = \mathrm{tr}(T) - t_1 = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} t_i$.

Soit T_1 l'endomorphisme de $X_1 = \mathrm{Vect}\{e_2, \cdots, e_n\}$ de matrice $\mathbb{B}$ dans la base $\mathscr{C}_1 = \{e_2, \cdots, e_n\}$. T_1 n'est donc pas une homothétie et par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathscr{C}''$ de X_1 telle que la matrice $\mathbb{B}'$ de T_1 dans $\mathscr{C}''$ ait pour termes diagonaux $t_2, \cdots, t_n$.
Soit $\mathscr{B}'' = \{e_1\} \cup \mathscr{C}''$. La matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}''$ est par blocs $\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q}_1 \end{bmatrix}$ où $\mathbb{Q}_1$ est la matrice de passage de $\mathscr{C}_1$ à $\mathscr{C}''$, et $\mathbb{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q}_1^{-1} \end{bmatrix}$. Un calcul par blocs donne alors :

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}''} = \mathbb{Q}^{-1} \begin{pmatrix} t_1 & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \mathrm{x} & & & \end{pmatrix} \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} t_1 & \times & \cdots & \times \\ \times & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \times & & & \end{pmatrix},$$

Cette dernière matrice a bien comme éléments diagonaux $t_1, \cdots, t_n$. Ainsi on a vérifié par récurrence que :

> il existe une base $\mathscr{B}''$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les t_i où $i \in [\![1\,;n]\!]$.

4 -Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que T *est un endomorphisme de* X *vérifiant* $\mathrm{tr}\,T \in \mathbb{N}$ *et* $\mathrm{tr}\,T \geqslant \mathrm{rg}\,T$. *On pose* $\rho = \mathrm{rg}\,T$ *et* $\theta = \mathrm{tr}\,T$.

17. Par le théorème du rang, $\dim N(T) = n - \rho$. Soit X_1 un supplémentaire de $N(T)$ et $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base adaptée à la décomposition $X = F \oplus N(T)$.

> Dans cette base $\mathscr{B}$, $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ est de la forme $\begin{bmatrix} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{bmatrix}$.

18. Soit T_1 l'endomorphisme de X_1 de matrice $\mathbb{T}_1$ dans la base $\mathscr{B}_1 = \{e_1, \cdots, e_\rho\}$.
Comme $\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(\mathbb{T}_{\mathscr{B}}) = \mathrm{tr}(\mathbb{T}_1) = \mathrm{tr}(T_1)$, $\mathrm{tr}(T_1)$ est élément de $\mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}(T_1) \geqslant \rho$.
Soient $t_i = 1$ pour $i \in [\![1\,;\rho - 1]\!]$ et $t_\rho = \mathrm{tr}(T) - (\rho - 1) \geqslant 1$. Ces ρ nombres sont des entiers naturels non nuls dont la somme est égale à $\mathrm{tr}\,T_1$. Par la question 16, T_1 n'étant pas une homothétie, il existe $\mathscr{B}_1''$ une base de X_1 où $\mathbb{T}_1'$, matrice de T' dans la base $\mathscr{B}_1''$, admet comme éléments diagonaux $t_1, \cdots, t_\rho$.
Soit $\mathscr{B}' = \mathscr{B}_1'' \cup \{e_{\rho+1}, \cdots, e_n\}$.

> Dans cette nouvelle base $\mathscr{B}'$, la matrice de T a la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{T}_1' & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}_2' & \mathbb{O} \end{pmatrix}$ où $\mathbb{T}_1'$ a comme éléments diagonaux des entiers non nuls.

19. Soient $C_1, \cdots, C_\rho$ les premières colonnes de $\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}$. Soit P_i l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}'$ est par blocs :

$$\mathbb{P}_{i\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{t_i} C_i & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice ayant un 1 en place (i,i), on a $\mathbb{P}_i^2 = \mathbb{P}_i$, ce qui prouve que les P_i sont des projecteurs. Ainsi

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{\rho} t_i P_i = \underbrace{P_1 + \cdots P_1}_{t_1 \text{ fois}} + \cdots + \underbrace{P_\rho + \cdots + P_\rho}_{t_\rho \text{ fois}} \quad \text{est une somme de projecteurs.}}$$

20. Comme $\mathbb{T}_1 = \alpha \mathbb{I}_\rho$, $\operatorname{tr}(T) \geqslant \rho$ donne $\alpha \geqslant 1$. Si $\alpha = 1$, on peut utiliser la méthode précédente (on peut même l'utiliser si $\alpha \in \mathbb{N}$) en décomposant en somme de ρ projecteurs de rang 1 .

Si $\alpha > 1$, soit P_0 de matrice $\mathbb{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$. Alors $T - P_0$ a dans cette base une matrice de la forme $(\mathbb{T} - \mathbb{P}_0)_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \mathbb{T}_1'' & 0 \\ \mathbb{T}_2' & 0 \end{bmatrix}$ où $\mathbb{T}_1''$ est une matrice ayant pour éléments diagonaux $(\alpha - 1, \alpha, \cdots, \alpha)$: ce n'est donc pas une matrice d'homothétie. De plus, $T - P_0$ est de rang au plus ρ (sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ a $n - \rho$ colonnes nulles). Ainsi $T - P_0$ vérifie

$$\operatorname{tr}(T - P_0) = \rho\alpha - 1 > \rho - 1 \quad \text{donc} \quad \operatorname{tr}(T - P_0) \geqslant \rho \geqslant \operatorname{rg}(T - P_0)$$

donc on peut appliquer la question précédente. $T' = T - P_0$ est une somme de projecteurs et comme $T = P_0 + (T - P_0)$:

$$\boxed{T \text{ est une somme de projecteurs}}$$

On a ainsi prouvé que T est une somme de projecteurs si et seulement si sa trace est un entier naturel supérieur ou égal à son rang (*c'est joli, non ?*).

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆