DS N°1 (le 10/09/2016)

– Ce DS est constitué de 7 exercices dont la difficulté varie de ($\star$) à ($\star\star\star\star$).

– Chaque exercice est de plus affecté d'un certain nombre de points.

– Vous devez traiter au choix 2, 3 ou 4 exercices tels que le total des points des exercices choisis soit exactement égal à 30.

– Les exercices choisis seront indiqués au début de la copie, et la réponse à chaque exercice sera faite sur une feuille séparée.

EXERCICE 1 : ($\star$) 6 points

E désigne ici le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$.
On note :

$$F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \ ; \ G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$$
$$\text{et } H = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. En préciser la dimension.

2. Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont en somme directe et que

$$F \oplus G = H .$$

3. On note $K = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}$. Démontrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E et que

$$E = F \oplus G \oplus K .$$

EXERCICE 2 : ($\star$)-($\star\star$) 6 points

E désigne ici le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni des lois usuelles.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on note $\alpha_t : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+t \end{array} \right.$ et on considère l'application :

$$\varphi_t : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f \circ \alpha_t \end{array} \right. .$$

Autrement dit, pour $f \in E$, $\varphi_t(f)$ est l'application : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x+t) \end{array}$.

Enfin, pour $f \in E$ on note :

$$V(f) = \mathrm{Vect}\left(\{\varphi_t(f),\ t \in \mathbb{R}\}\right).$$

1. Pour chacune des applications f suivantes, montrer que le sous-espace vectoriel $V(f)$ est de dimension finie et en donner une base.

a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array} \right. .$

b) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right. .$

c) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right. .$

2. On considère dans cette question l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{x^2} \end{cases} .$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ n réels distincts.
Montrer que la famille $\{\varphi_{t_k}(f),\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$ est libre.

b) En déduire que $V(f)$ n'est pas de dimension finie.

EXERCICE 3 : ($\star\star$) 6 points

$n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel fixé.
On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Soit φ l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - nXP\,.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour tout entier $i \in [\![0\,;n]\!]$, on pose : $P_i = (X+1)^i(X-1)^{n-i}$.
Montrer que $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Calculer $\varphi(P_i)$ en fonction de P_i.

3. Déterminer l'image et le noyau de φ.
Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur n) pour que φ soit bijective.

EXERCICE 4 : ($\star\star$) 12 points

Dans cet exercice, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , et a et b sont deux réels *distincts*.

1. <u>Un résultat préliminaire</u>
Soit u un endomorphisme de E.
Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(u^2 - (a+b)u + ab\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(u - a\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - b\mathrm{Id}_E)\,.$$

(on rappelle que u^2 désigne l'endomorphisme $u \circ u$, et Id_E désigne l'application identique de E).

p, q, f sont maintenant trois endomorphismes de E vérifiant les trois relations :

$$p + q = \mathrm{Id}_E \quad ; \quad ap + bq = f \quad ; \quad a^2p + b^2q = f^2\,.$$

On suppose également que f n'est pas une homothétie.

2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - b\mathrm{Id}_E)$.

3. a) Établir que $p \circ q = q \circ p = 0$.

b) Montrer que p et q sont des projecteurs non nuls.

c) Préciser leurs images et leurs noyaux.

On suppose désormais $ab \neq 0$.

4. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de a, b, p, q.

5. Montrer que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f^n = a^n p + b^n q\,,$$
puis montrer que cette relation se généralise à $n \in \mathbb{Z}$.

6. Dans cette dernière question, $E = \mathbb{R}^2$ et on définit les applications :
$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x+y) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x+2y) \end{array} \right. .$$
On admettra qu'il s'agit bien d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $h^k = 2^{k-1} h$.

b) En déduire l'expression de f^n en fonction de Id_E et de h pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer qu'il existe deux réels distincts que l'on déterminera $a < b$ tels que :
$$(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = 0\,.$$

d) Montrer qu'il existe deux projecteurs p et q que l'on exprimera en fonction de Id_E et de h tels que
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f^n = a^n p + b^n q\,.$$

EXERCICE 5 : ($\star\star$) (Mines d'Alès 1992) 12 points

NOTATIONS ET DÉFINITIONS :

• $\mathbb{R}[X]$ désigne l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients réels.

• Pour tout entier naturel k, $\mathbb{R}_k[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à k.

• m désigne un entier naturel strictement supérieur à 2, et n un entier naturel non nul et strictement inférieur à $\frac{m}{2}$.

• A désigne un élément de $\mathbb{R}[X]$ défini par :
$$A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0\,.$$

• I est un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel A ne s'annule pas.

• Enfin, f désigne l'application de $\mathbb{R}_m[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ définie par : $f(P) = AP' - PA'$, où P' et A' sont respectivement les polynômes dérivés de P et de A.

QUESTIONS :

1. a) Déterminer en fonction de m et n la valeur maximale p du degré du polynôme $f(P)$.

b) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

c) Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que QA soit élément de $\mathbb{R}_m[X]$. Déterminer $f(QA)$.

d) En utilisant une formule de dérivation sur I, déterminer le noyau de f. En déduire le rang de f.

2. Pour tout élément i de $[\![0\,;m]\!]$, on pose : $Y_i = f(X^i)$.

a) Montrer que la famille de polynômes $(Y_i)_{i \in [\![0;m]\!] \setminus \{n\}}$ est une base de l'image de f.

b) En calculant $f(A)$, déterminer les coordonnées de Y_n dans cette base.

3. a) En utilisant la question 1.c, montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$ divisible par A^2 appartient à $\mathrm{Im}\, f$.

b) En déduire qu'un polynôme S de $\mathbb{R}_p[X]$ appartient à $\mathrm{Im}\, f$ si et seulement si le reste R de sa division euclidienne par A^2 appartient à $\mathrm{Im}\, f$, et que, dans ce cas, R appartient à $\mathrm{Vect}(\{Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}\})$.

4. a) Soit P élément de $\mathbb{R}_m[X]$. Déterminer l'ensemble des primitives sur I de :

$$\frac{S}{A^2} \text{ avec } S = f(P)\ , \text{ que l'on notera } \int \frac{S(x)}{A^2(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

b) En déduire $\displaystyle\int \frac{Y_i(x)}{A^2(x)}\,\mathrm{d}x$, pour tout i élément de $[\![0\,;m]\!]$.

5. Dans cette question, m est un entier naturel strictement supérieur à 6 et $A = X^3 - X + 1$.

a) Calculer Y_0, Y_1 et Y_2.

b) Montrer que le polynôme $S = X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 2X - 1$ est élément de $\operatorname{Im} f$.

c) Déterminer : $\displaystyle\int \frac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{(x^3 - x + 1)^2}\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser la question 4).

d) Donner une condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier les réels a, b, c, d, e pour que le polynôme : $aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ soit élément de $\operatorname{Im} f$.

EXERCICE 6 : ($\star\star\star$) 18 points

NOTATIONS ET DÉFINITIONS :

- E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
- p et q désignent deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$. On pose alors $u = p + q$ et $\varphi = p \circ q$.
- Enfin, on note :

$$\begin{array}{rclcl} E_1 & = & \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) & = & \{x \in E \mid u(x) = x\}\ , \\ E_2 & = & \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) & = & \{x \in E \mid u(x) = 2x\}\ . \end{array}$$

QUESTIONS :

1. a) Montrer que φ est un projecteur.

b) Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$, et que $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

2. Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

3. a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $u - \alpha\varphi$ soit un projecteur.

b) Montrer que : $\operatorname{Ker}(u - \varphi) = \operatorname{Ker} u$.

4. Montrer que : $E_2 = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

5. a) Montrer que : $E_1 \subset \operatorname{Ker}\varphi$.

b) Montrer que $\operatorname{Ker} p$ (resp. $\operatorname{Ker} q$) est stable par q (resp. par p).

c) Déduire des deux questions précédentes que :

$$E_1 = (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q) \oplus (\operatorname{Ker} q \cap \operatorname{Im} p).$$

d) En déduire : $E_1 = \operatorname{Im}(p - q)$.

6. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{ll} (i) & E_2 = \{0_E\}\,; \\ (ii) & \varphi = 0\,; \\ (iii) & u \text{ est un projecteur}\,; \\ (iv) & E = E_1 \oplus \operatorname{Ker} u\,. \end{array}$$

7. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{ll} (i) & \operatorname{Ker} u = \{0_E\}\,; \\ (ii) & u - \mathrm{Id}_E \text{ est un projecteur}\,; \\ (iii) & E = E_1 \oplus E_2\,. \end{array}$$

8. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{ll} (i) & E_1 = \{0_E\}\,; \\ (ii) & p = q\,; \\ (iii) & \frac{u}{2} \text{ est un projecteur}\,; \\ (iv) & E = \operatorname{Ker} u \oplus E_2\,. \end{array}$$

9. a) Calculer u^2 et u^3 en fonction de p et q.
En déduire la relation : $u^3 - 3u^2 + 2u = 0$.

b) En déduire que : $E = \operatorname{Ker} u \oplus E_1 \oplus E_2$.

EXERCICE 7 : ($\star\star\star\star$) 12 points

NOTATIONS ET DÉFINITIONS :

$\mathbb{K}$ désigne ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

• Étant donnée une suite :

$$E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} \dots \qquad \dots \xrightarrow{f_n} E_{n+1}$$

formée de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E_i et d'applications linéaires f_i, on dira que cette suite est exacte si, pour tout entier $i \in [\![1\,;n-1]\!]$, l'image de l'application linéaire f_i est égale au noyau de l'application linéaire f_{i+1}.

• D'autre part, on dit qu'un diagramme, par exemple :

(1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "d"'] & E \arrow[d, "e"'] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \arrow[r, "i'"] & E' \end{tikzcd}$$

formé d'ensembles et d'applications entre ceux-ci est commutatif, si, quels que soient les sommets X et Y de ce diagramme, toutes les applications de X dans Y que l'on obtient en composant de toutes les façons possibles les applications figurant dans ce diagramme sont égales.
Ainsi, dans le cas du diagramme ci-dessus, cela se traduit par : $b \circ f = f' \circ a$, $c \circ g = g' \circ b$, et d'autres relations analogues...

QUESTIONS :

1. On considère le diagramme **(1)**, dans lequel tous les sommets représentent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et où toutes les applications sont linéaires, et l'on suppose ce diagramme commutatif..

On suppose que les deux lignes du diagramme sont des suites exactes (ainsi, l'on a : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$, $\operatorname{Im} f' = \operatorname{Ker} g'$ etc...).

Démontrer les résultats suivants (lemme des cinq) :

a) Si a est surjective et si b et d sont injectives, alors c est injective.

b) Si e est injective et si b et d sont surjectives, alors c est surjective.

c) Si a est surjective, si e est injective et si b et d sont bijectives, alors c est bijective.

2. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & F' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u'"'] & F'' \arrow[r] \arrow[d, "u''"'] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & G' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "v'"'] & G'' \arrow[r] \arrow[d, "v''"'] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & H \arrow[r, "h"] \arrow[d] & H' \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & H'' \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
 & \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

où l'on suppose que :

– les sommets sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ;

– les applications sont des applications linéaires ;

– le diagramme est commutatif ;

– les trois colonnes forment des suites exactes ;

– les deux premières lignes forment des suites exactes.

Démontrer (lemme des neuf) que la troisième ligne forme alors une suite exacte.
Indication : on pourra remarquer que, si une suite :

$$\{0\} \longrightarrow F \xrightarrow{f} F' \xrightarrow{f'} F'' \longrightarrow \{0\}$$

forme une suite exacte, alors f est injective et f' est surjective...