PROBLÉME I

Notations.

E et F désignent des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, de dimensions respectives p et n non nulles.
f est une application linéaire non nulle de E vers F (c'est-à-dire $f \in \mathscr{L}(E, F)$).
On désigne par :

- $\Omega(f)$ l'ensemble des endomorphismes g de F tels que : (1) $g \circ f = 0$.
- $\Gamma(f)$ l'ensemble des endomorphismes h de F tels que : (2) $h \circ f = f$.
- $\Gamma'(f)$ l'ensemble des éléments de $\Gamma(f)$ qui sont inversibles.

Première partie.

A. 1. Montrer que $\Omega(f)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et qu'il est stable pour la composition des endomorphismes de F.

Est-ce une sous-algèbre de $\mathscr{L}(F)$?

2. Montrer que $\Gamma(f)$ est non vide, qu'il est stable pour la composition des endomorphismes de F, puis que $\Gamma'(f)$ est un groupe pour la composition des endomorphismes de F.

B. Dans cette question, $n = p$. Le rang de f, noté r, vérifie $r < n$.

1. g décrivant $\Omega(f)$, déterminer la valeur maximale de l'entier r', r' étant le rang de g.

2. Démontrer que l'on peut trouver des bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{B}'$ de F telles que la matrice de f relativement à ces bases soit la matrice A dont le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne $a_{i,j}$ vérifie $a_{i,i} = 1$ si $i \leqslant r$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

3. En déduire la dimension de $\Omega(f)$ (*Indication : on pourra utiliser des produits de matrices par blocs*). $(\Omega(f), +, \circ)$ est-il un anneau ?

C. Dans cette question, E et F sont de dimension 3, rapportés à des bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$, et f est l'application linéaire dont la matrice dans ces bases est

$$A = M_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}'_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer dans $\mathscr{B}'_1$ les matrices des éléments de $\Omega(f)$, $\Gamma(f)$ et $\Gamma'(f)$.

Deuxième partie.

Le rang de f est maintenant le plus petit des entiers n et p.

A. On suppose $p = n$. Déterminer $\Omega(f)$, puis $\Gamma(f)$ et $\Gamma'(f)$.

B. On suppose $p > n$. Déterminer $\Omega(f)$, puis $\Gamma(f)$ et $\Gamma'(f)$.

C. On suppose maintenant, *et jusqu'à la fin de la troisième partie du problème*, que $p < n$.

1. g décrivant $\Omega(f)$, déterminer la valeur maximale de l'entier r', r' étant le rang de g.

2. Montrer que l'on peut trouver des bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{B}'$ de F telles que la matrice de f relativement à ces bases soit la matrice A, dont on précisera le nombre des lignes et celui des colonnes, dont le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne $a_{i,j}$ vérifie $a_{i,i} = 1$ si $i \in [\![1\,;p]\!]$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

En déduire :

a) l'ensemble des matrices décrit par la matrice associée à g respectivement à la base $\mathscr{B}'$ lorsque g décrit $\Omega(f)$, puis l'ensemble des matrices décrit par la matrice associée à h respectivement à la base $\mathscr{B}'$ lorsque h décrit $\Gamma(f)$ et enfin lorsque h décrit $\Gamma'(f)$.

b) la dimension de $\Omega(f)$.

Les matrices demandées dans cette question seront données sous forme de blocs.

Troisième partie.

On rappelle que $p < n$.

On se propose d'étudier l'équation d'inconnue w où w est une application linéaire :

$$(3) \quad f \circ w = h \quad , \quad h \text{ étant un élément donné de } \Gamma(f).$$

1. Préciser l'espace de départ et l'espace d'arrivée d'une éventuelle solution à cette équation.

2. Montrer que si cette équation admet des solutions, alors :

a) h est un projecteur.

b) h est de rang au plus p.

c) h est de rang exactement p.

d) l'image de h est celle de f.

e) l'équation (3) a exactement une solution.

3. Soit alors h un projecteur dont l'image est celle de f.

En utilisant les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ déjà définies dans la seconde partie, résoudre l'équation (3).

Déduire du résultat une condition nécessaire et suffisante portant sur h pour que l'équation (3) admette une solution.

Quatrième partie.

Résoudre l'équation d'inconnue $W \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$(4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times W = H \quad \text{avec } H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ donnée telle que : } H \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$