PROBLÈME II : inspiré de MINES PC-PSI 2007 .

I. Préliminaires.

1. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} |MN(i,j)| = \sum_{j=1}^{m} \left|\sum_{k=1}^{r} M(i,k)N(k,j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} |M(i,k)||N(k,j)| =$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{r} |M(i,k)| \sum_{j=1}^{m} |N(k,j)| \leqslant \sum_{k=1}^{r} |M(i,k)| \times ||N|| \leqslant ||M|| \times ||N||$. On a donc $||MN|| \leqslant ||M|| \times ||N||$.

2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |P(i,j)| = \sum_{j=1}^{n} P(i,j) = 1$ puisque P est positive et $PJ_n = J_n$. On a donc $||P|| = 1$.

3. On montre la propriété par récurrence. Elle est vraie pour $k=1$ puisque P est stochastique. Supposons la vraie pour k. $P^{k+1} = P^k \times P$ est à coefficients positifs puisque P^k et P le sont. De plus, $P^{k+1}J_n = P^k \times PJ_n = P^k \times J_n = J_n$. P^{k+1} est donc bien stochastique.

II. Pseudo-inverse

4. D'une part on a l'inclusion habituelle $\mathrm{Im}(a^2) \subset \mathrm{Im}(a)$; d'autre part $a = aa'a = a^2a'$ entraine que $\mathrm{Im}(a) \subset \mathrm{Im}(a^2)$. On a donc $\mathrm{Im}(a^2) = \mathrm{Im}(a)$ d'où $\mathrm{rang}(a)=\mathrm{rang}(a^2)$.

5. Puisque $\mathrm{Im}(a^2) \subset \mathrm{Im}(a)$ et $\mathrm{rang}(a)=\mathrm{rang}(a^2)$ on déduit que $\mathrm{Im}(a^2) = \mathrm{Im}(a)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$: $ax \in \mathrm{Im}(a)$ entraine qu'il existe y tel que $ax = a^2y$; en posant $z = x - ay$ on obtient que $z \in \mathrm{Ker}(a)$ d'où $x = ay + z \in \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Ker}(a)$. Ainsi $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Ker}(a)$ et le théorème du rang entraine alors que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)$.

[*Autre solution :* on a aussi $\mathrm{Ker}\, a = \mathrm{Ker}\, a^2$ à l'aide du théorème du rang, et il est alors facile d'en déduire $\mathrm{Ker}\, a \cap \mathrm{Im}\, a = \{0\}$.]

6. Soit $\mathcal{B}'$ une base adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)$; la matrice de $a \neq 0$ dans cette base s'écrit par blocs : $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ puisque $\mathrm{Im}(a)$ est stable par a. La matrice B est inversible puisque la restriction de a à $\mathrm{Im}(a)$, supplémentaire de $\mathrm{Ker}(a)$, est un isomorphisme de $\mathrm{Im}(a)$ sur $\mathrm{Im}(a)$. Si W est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$ on a bien $A = W \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W^{-1}$.

7. Définissons $A' = W \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W^{-1}$. On vérifie que $AA' = A'A = W \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W^{-1}$, puis que $AA'A = A$ et $A'AA' = A'$: A' est un pseudo-inverse de A.

8. Puisque a' commute avec a, $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$ sont stables par a'. La matrice de a' dans la base $\mathcal{B}'$ s'écrit donc : $\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$, d'où $A' = W \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} W^{-1}$. De $A' = A'AA'$ on déduit par des produits par blocs : $D = DBD$ et $E = E \times 0 \times E = 0$.

9. $(aa')^2 = a \times a'aa' = a \times a'$ donc $aa' = a'a$ est bien un projecteur. $\mathrm{Ker}(a) \subset \mathrm{Ker}(a'a)$ et $\mathrm{Ker}(a'a) \subset \mathrm{Ker}(aa'a) = \mathrm{Ker}(a)$ donc $\mathrm{Ker}(aa') = \mathrm{Ker}(a)$. $\mathrm{Im}(aa') \subset \mathrm{Im}(a)$ et $\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(aa'a) \subset \mathrm{Im}(aa')$ donc $\mathrm{Im}(aa') = \mathrm{Im}(a)$. La matrice du projecteur aa' dans la base $\mathcal{B}'$ adaptée à $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(aa') \oplus \mathrm{Ker}(aa')$ est donc $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ égale aussi à $W^{-1}AA'W$.

10. $W^{-1}AA'W = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ entraine $BD = I_r$ d'où $D = B^{-1}$; il y a bien unicité du pseudo-inverse.

III. Détermination des vecteurs invariants par ${}^tP$

11. Soit $X \neq 0$ tel que $AX = 0$ soit $PX = X$; soit k tel que $|x_k| = N_\infty(X)$; quitte à changer X en $-X$ on peut supposer $x_k > 0$.
$\displaystyle x_k = \sum_{j=1}^{n} p_{k,j}x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} p_{k,j}x_k = x_k$ d'où $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{k,j}(x_k - x_j) = 0$ avec $p_{k,j} > 0$ et $x_k - x_j \geqslant 0$. On en déduit pour tout j, $x_j = x_k$ et donc $X = x_1J_n$: $\mathrm{Ker}(A)$ est une droite engendrée par J_n.

12. Soit $X \in \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A)$: $PX = X$ et il existe Y tel que $X = Y - PY$.
En multipliant par P^{k-1} on obtient, pour tout $k \geqslant 1$, $P^{k-1}X = X = P^{k-1}Y - P^kY$ d'où en ajoutant de 1 à k : $kX = Y - P^kY$.
On a $N_\infty(PY) \leqslant N_\infty(Y)$ puisque pour tout i, $\left|\sum_{j=1}^n p_{i,j}y_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^n p_{i,j}|y_j| \leqslant \sum_{j=1}^n p_{i,j}N_\infty(Y) = N_\infty(Y)$.
Par suite, $N_\infty(X) \leqslant \dfrac{1}{k}(N_\infty(Y) + N_\infty(P^kY)) \leqslant \dfrac{2}{k}N_\infty(Y)$ d'où en faisant tendre k vers $+\infty$: $X = 0$.
On a donc $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A) = \{0\}$ d'où $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$.

13. De $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)$, on déduit que $\mathrm{Im}(a) = a(\mathbb{R}^n) = a(\mathrm{Im}(a) + \mathrm{Ker}(a)) = a^2(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Im}(a^2)$.

14. On fait une démonstration par récurrence.
C'est immédiat pour $k = 1$: $I_n = (I_n - (I_n - C))C^{-1}$.
Supposons l'égalité vraie pour k ; on obtient pour $k+1$:
$$\sum_{j=0}^k (I_n - C)^j = (I_n - (I_n - C)^k)C^{-1} + (I_n - C)^k = (I_n - (I_n - C)^k + (I_n - C)^kC)C^{-1} = (I_n - (I_n - C)^{k+1})C^{-1}.$$
L'égalité est donc vraie pour $k+1$.

15. On fait une démonstration par récurrence.
C'est immédiat pour $k = 1$: $I_n = (I_n - P)A' + (I_n - AA')$ puisque $I_n - P = A$.
Supposons l'égalité vraie pour k ; on obtient pour $k+1$:
$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^k P^j - (I_n - P^{k+1})A' - (k+1)(I_n - AA') &= P^k + (I_n - P^k)A' - (I_n - P^{k+1})A' - (I_n - AA') \\ &= P^k + (P^{k+1} - P^k)A' - (I_n - AA') = P^k(I_n - AA') - (I_n - AA') \\ &= (P^k - I_n)(I_n - AA') = (P^{k-1} + \ldots + I_n)(P - I_n)(I_n - AA') \\ &= (P^{k-1} + \ldots + I_n)(-A + A^2A') = 0.\end{aligned}$$
L'égalité est donc vraie pour $k+1$.
Une autre méthode utilise la question 14 en prenant $C = B$ pour $A = W\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}W^{-1}$ d'où $P = W\begin{bmatrix} I_r - B & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}W^{-1}$.
$$\sum_{j=0}^{k-1} P^j = W\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{k-1}(I_r - B)^j & 0 \\ 0 & kI_{n-r} \end{bmatrix}W^{-1} = W\begin{bmatrix} (I_r - (I_r - B)^k)B^{-1} & 0 \\ 0 & kI_{n-r} \end{bmatrix}W^{-1}.$$
Cette matrice est bien égale à $(I_n - P^k)A' + k(I_n - AA') = W\begin{bmatrix} (I_r - (I_r - B)^k)B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}W^{-1} + kW\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}W^{-1}$.

16. $||(I_n - P^k)A'|| \leqslant (||I_n|| + ||P||^k)||A'||$ puisque $||...||$ est une norme et en utilisant la question 1. Avec la question 2 on obtient $||(I_n - P^k)A'|| \leqslant 2||A'||$ d'où $\lim_{k \mapsto \infty} \dfrac{1}{k}(I_n - P^k)A' = 0$. On en déduit $\lim_{k \mapsto \infty} \dfrac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j = I_n - AA'$.

17. D'une part, $\dfrac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j$ a ses coefficients positifs (question 3) ; la matrice limite $I_n - AA'$ a donc également ses coefficients positifs. D'autre part $(I_n - AA')J_n = J_n - A'AJ_n = J_n$ puisque $AJ_n = J_n - PJ_n = 0$. $I_n - AA'$ est bien stochastique.
$(I_n - AA')A = A - AA'A = 0$ puisque A' est le pseudo-inverse de A.

18. D'après la question précédente, $(I_n - AA')P = I_n - AA'$, ce qui se traduit par $L_iP = L_i$ pour toutes les lignes de $I_n - AA'$.
D'après la partie II, AA' est la matrice de la projection sur $\mathrm{Im}(A)$ de direction $\mathrm{Ker}(A)$. $I_n - AA'$ est donc la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A)$ de direction $\mathrm{Im}(A)$. Elle est donc de rang 1. En particulier, toutes les lignes de $I_n - AA'$ sont colinéaires. Comme $I_n - AA'$ est stochastique, le coefficient de proportionalité entre les lignes vaut 1 et toutes les lignes de $I_n - AA'$ sont égales et égale à un élément L qui vérifiera bien $LP = L$.