PSEUDO-SOLUTIONS ET PSEUDO-INVERSE (CCP PC 2006)

Notations et objectifs

Dans tout le problème, E et F désignent deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions au moins égales à 2. Pour chacun de ces espaces, le produit scalaire de deux vecteurs x et y et la norme d'un vecteur x sont respectivement notés $\langle x \,|\, y\rangle$ et $\|x\|$.

$\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

La matrice transposée d'une matrice A est notée ${}^{\mathbf{t}}A$.

L'objet de la première partie est de caractériser la composée de deux projections orthogonales qui commutent.

La seconde partie propose une résolution approchée d'une équation linéaire n'ayant pas de solution en introduisant la notion de *pseudo-solution* et la troisème partie généralise la notion d'inverse d'une matrice carréeà une matrice rectangulaire en introduisant la notion de *pseudo-inverse*.

Partie I

I.1. Soit x et y deux vecteurs de E, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de$E$, X et Y les matrices respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$.
Montrer que $\langle x \,|\, y\rangle = {}^{\mathbf{t}}XY = {}^{\mathbf{t}}YX$.

I.2. Soit H un sous-espace vectoriel de F tel que $1 \leqslant \dim H < \dim F$. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ une base orthonormale de H et p le projecteur orthogonal de F sur H.

a) Pour tout $z \in F$, exprimer (sans justification) $p(z)$ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_k)$.

b) Soit $\mathcal{C}$ une base orthonormale de F. Relativement à cette base $\mathcal{C}$, on note Z la matrice d'un vecteur de $z \in F$, $M(p)$ la matrice de p et pour tout $i \in [\![1\,;k]\!]$, E_i la matrice de e_i.

i) Montrer que pour tout $z \in F, M(p)Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E_i \, {}^{\mathbf{t}}E_i Z$.

ii) En déduire $M(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E_i \, {}^{\mathbf{t}}E_i$.

I.3. Soit q un projecteur quelconque de F.
Soit $\mathcal{C}$ une base orthonormale de F, et $M(q)$ la matrice de q dans cette base.
Montrer que q est un projecteur orthogonal si et seulement si la matrice $M(q)$ est symétrique.

I.4. Exemple : On note M la matrice définie par $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que M est la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, d'un projecteur orthogonal de $\mathbf{R}^4$.

b) Donner une base orthonormale du noyau et une base orthonormale de l'image de ce projecteur.

I.5. On suppose dans cette question que p et r sont deux projecteurs orthogonaux qui commutent.

a) Montrer que $p \circ r$ est un projecteur.

b) Montrer que : $\mathrm{Ker}(p \circ r) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$ et $\mathrm{Im}(p \circ r) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r)$.

c) Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.

I.6. On suppose dans cette question que p et r sont deux projecteurs orthogonaux.
On pose $m = \dim F$ et on choisit une base orthonormale de F telle que les matrices de p et r dans cette base soient respectivement les matrices décomposées en blocs :

$$P = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

où I_k est la matrice unité d'ordre k, A une matrice carrée d'ordre k et D une matrice carrée d'ordre $m-k$.

a) Dites pourquoi il est possible de trouver une telle base orthonormale.

b) Montrer que les matrices vérifient les relations :

$$A^2 + BC = A, AB + BD = B, CB + D^2 = D, {}^{\mathbf{t}}A = A, {}^{\mathbf{t}}B = C, {}^{\mathbf{t}}D = D.$$

c) Montrer que p et r commutent si et seulement si $C = 0$.

Partie II

Dans cette partie, sont donnés un élément f de $\mathcal{L}(E, F)$ et un élément v de F.

II.1. En considérant la projection orthogonale de v sur l'image de f, montrer qu'il existe un élément x_0 de E tel que :

$$\|f(x_0) - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\|.$$

Dans la suite x_0 sera appelée une *pseudo-solution* de l'équation :

$$f(x) = v \tag{1}$$

II.2. Montrer que si f est injective, alors l'équation (1) admet une pseudo-solution unique.

II.3. Montrer que x_0 est pseudo-solution de l'équation (1) si et seulement si, pour tout x appartenant à E : $\langle f(x) \,|\, f(x_0) - v \rangle = 0$.

II.4. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormales de E et F respectivement. On appelle A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, V la matrice de v dans $\mathcal{C}$ et X_0 celle de x_0 dans $\mathcal{B}$.

Écrire sous forme matricielle l'équation $\langle f(x) \,|\, f(x_0) - v \rangle = 0$ et en déduire que x_0 est pseudo-solution de l'équation (1) si et seulement si, :

$${}^{\mathbf{t}}AAX_0 = {}^{\mathbf{t}}AV.$$

II.5. Dans cette question, on prend $E = F = \mathbf{R}^3$ munis du produit scalaire usuel. Relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$, les matrices de f et v sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les pseudo-solutions de l'équation $f(x) = v$.

II.6. **Application :** n désignant un entier supérieur ou égal à deux, on considère trois éléments $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ et $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ de $\mathbf{R}^n$ et on souhaite trouver deux réels λ et μ tels que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$ soit minimale.

a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $f(x) = v$ où f est un élément de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^n)$. Préciser le vecteur v et donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.

b) Comment doit-on choisir a et b pour que l'application f soit injective ?

c) Lorsque cette dernière condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant λ et μ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbf{R}^n$.

Partie III

Dans cette partie, f désigne toujours un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

III.1. **a)** Soit y un élément de F. Montrer qu'il existe deux vecteurs x et y' tels que :

$$y = f(x) + y', (x, y') \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp} \times (\operatorname{Im} f)^{\perp}.$$

b) Montrer qu'un tel couple est unique. On peut alors définir l'application g de F vers E qui à y fait correspondre x.

c) Montrer que l'application g est linéaire. g sera appelée l'application *pseudo-inverse* de f.

.

III.2. Déterminer le noyau et l'image de g.

III.3. **a)** Montrer que $g \circ f$ est le projecteur orthogonal de E sur $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

b) Montrer que $f \circ g$ est le projecteur orthogonal de F sur $\operatorname{Im} f$.

III.4. **Premier exemple :** On prend $E = \mathbf{R}^3, F = \mathbf{R}^2$ munis de leur produit scalaire usuel. La matrice de f relativement aux bases canoniques est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de g relativement aux bases canoniques.

III.5. **Deuxième exemple :** On prend $E = F = \mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. La matrice de f relativement à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de g relativement à la base canonique.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆