CORRIGÉ : PSEUDO-SOLUTIONS ET PSEUDO-INVERSE (CCP PC 2006)

Partie I

I.1. C'est une question de cours (mais la démonstration était explicitement demandée).
Soit $n = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
En écrivant $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ on a, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle x \,|\, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} x_i y_j \langle e_i \,|\, e_j \rangle = \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} x_i y_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Comme les matrices respectives de x et y dans la base $\mathscr{B}$ sont $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ on a, en identifiant un réel a avec la matrice (a) : $\boxed{\langle x \,|\, y \rangle = {}^{\mathbf{t}}XY = {}^{\mathbf{t}}YX.}$

I.2. a) C'est encore une question de cours : si la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est orthonormée, le projeté orthogonal d'un vecteur z sur $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est :

$$p(z) = \sum_{i=1}^{k} \langle e_i \,|\, z \rangle \, e_i.$$

b) i) L'égalité précédente s'écrit matriciellement : $M(p)Z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i$ avec $\lambda_i = \langle e_i \,|\, z \rangle$. Mais un calcul immédiat montre que multiplier le vecteur colonne E_i par le scalaire λ_i équivaut à multiplier E_i (matrice de type $(n, 1)$) à droite par la matrice $(1, 1)$ égale à (λ_i). Et puisque $(\lambda_i) = {}^{\mathbf{t}}E_i Z$, on obtient bien, en utilisant l'associativité du produit matriciel :

$$\boxed{M(p)Z = \sum_{i=1}^{k} E_i \, {}^{\mathbf{t}}E_i Z \ .}$$

ii) Soit f l'endomorphisme de F dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est : $M(p) - \sum_{i=1}^{k} E_i \, {}^{\mathbf{t}}E_i$.

L'égalité précédente montre que, pour tout $z \in E$, $f(z) = 0$, donc $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $\boxed{M(p) = \sum_{i=1}^{k} E_i \, {}^{\mathbf{t}}E_i .}$

I.3.
- Si q est un projecteur orthogonal, sa matrice dans une base orthonormée est, d'après la question précédente, de la forme $M(q) = \sum_{i=1}^{k} E_i \, {}^{\mathbf{t}}E_i$.
  Comme les matrices $E_i \, {}^{\mathbf{t}}E_i$ sont symétriques (égales à leurs transposées), $\underline{M(q) \text{ est une matrice symétrique.}}$
- Réciproquement, soit q un projecteur dont la matrice M dans la base orthonormée $\mathcal{C}$ est symétrique, et soit $x \in \mathrm{Ker}\, q$ et $y \in \mathrm{Im}\, q$. En notant X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans $\mathcal{C}$, on a, puisque $y = q(y)$:

  $$\langle x \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, q(y) \rangle = {}^{\mathbf{t}}(MY)X = ({}^{\mathbf{t}}Y \, {}^{\mathbf{t}}M)X = ({}^{\mathbf{t}}YM)X = {}^{\mathbf{t}}Y(MX) = 0$$

  (en effet, $MX = 0$ puisque $x \in \mathrm{Ker}\, q$).
  Ainsi, $\mathrm{Ker}\, q \perp \mathrm{Im}\, q$: $\underline{q \text{ est un projecteur orthogonal.}}$

I.4. a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à M. Il est facile de vérifier que $M^2 = M$, donc f est un projecteur.
La matrice de f dans la base canonique, qui est orthonormée pour le produit scalaire usuel, est symétrique, donc d'après la question précédente, $\boxed{f \text{ est un projecteur orthogonal}}$.

b) On sait que la trace d'un projecteur est égale à son rang. Ici, $\operatorname{tr}(M) = 2$ donc le rang de f est égal à 2, et d'après le théorème du rang, on a aussi $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Il est clair que les vecteurs $e_1 + e_3$ et $e_2 + e_4$ sont dans le noyau de f, et puisque $\dim \operatorname{Ker} f = 2$, ils en forment une base. De plus ces deux vecteurs sont orthogonaux donc finalement :

$$\boxed{\text{Une base orthonormée de } \operatorname{Ker} f \text{ est formée des vecteurs } \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_4).}$$

On sait aussi que $\operatorname{Im} f$ est engendré par les vecteurs dont les coordonnées sont les colonnes de M, donc ici par $e_1 - e_3$ et $e_2 - e_4$. De plus ces deux vecteurs sont orthogonaux donc finalement :

$$\boxed{\text{Une base orthonormée de } \operatorname{Im} f \text{ est formée des vecteurs } \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_4).}$$

I.5. a) Puisque p et r commutent :

$$(p \circ r)^2 = (p \circ r) \circ (p \circ r) = p \circ (r \circ p) \circ r = p \circ (p \circ r) \circ r = p^2 \circ r^2 = p \circ r$$

donc $\boxed{p \circ r \text{ est un projecteur.}}$

b) **i)** – Soit $x \in \operatorname{Ker}(p \circ r)$: on a $x = r(x) + (x - r(x))$ avec $r(x) \in \operatorname{Ker} p$ et $x - r(x) \in \operatorname{Ker} r$ donc $x \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} r$.

– Soit $x \in \operatorname{Ker}(p) + \operatorname{Ker}(r)$: on peut écrire $x = y + z$ avec $p(y) = 0$ et $r(z) = 0$. Alors $p(r(x)) = p(r(y)) + p(r(z)) = p(r(y)) = r(p(y)) = 0$ (car p et r commutent), donc $x \in \operatorname{Ker}(p \circ r)$.

– Par double inclusion on a montré : $\boxed{\operatorname{Ker}(p \circ r) = \operatorname{Ker}(p) + \operatorname{Ker}(r)}$.

ii) – Soit $x \in \operatorname{Im}(p \circ r)$; puisque $p \circ r$ est un projecteur on a $x = p \circ r(x) = r \circ p(x)$ donc $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} r$.

– Soit $x \in \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(r)$. Puisque p et r sont des projecteurs on a $x = p(x)$ et $x = r(x)$ d'où $x = p \circ r(x)$ et $x \in \operatorname{Im}(p \circ r)$.

– Par double inclusion on a montré : $\boxed{\operatorname{Im}(p \circ r) = \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(r)}$.

c) Notons P et R les matrices de p et r dans une base orthonormée $\mathcal{C}$. On sait que P et R sont symétriques d'après **Q3** ; de plus elles commutent par hypothèse donc

$${}^{\mathbf{t}}(PR) = {}^{\mathbf{t}}R\, {}^{\mathbf{t}}P = RP = PR$$

donc PR est aussi une matrice symétrique ; d'après **Q3**, $\boxed{p \circ r \text{ est un projecteur orthogonal.}}$

I.6. a) Pour obtenir une base orthonormée où la matrice de p est de la forme donnée par l'énoncé, il suffit de faire la réunion d'une base orthonormée de $\operatorname{Im} p$ (qui est aussi le sous-espace vectoriel formé des vecteurs invariants par p) et d'une base orthonormée de $\operatorname{Ker} p$; cela donnera bien une base orthonormée de F puisque $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires orthogonaux.

b) $R^2 = R$; en calculant le produit par blocs on obtient $R^2 = \begin{bmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ CA + DC & CB + D^2 \end{bmatrix}$.

On en déduit $\boxed{A^2 + BC = A,\ AB + BD = B \text{ et } CB + D^2 = D.}$

Enfin, R étant la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée, elle est symétrique, d'où $\boxed{{}^{\mathbf{t}}A = A,\ {}^{\mathbf{t}}B = C \text{ et } {}^{\mathbf{t}}D = D.}$

c) En calculant les produits par blocs : $PR = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $RP = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}$.

Compte tenu de la relation ${}^{\mathbf{t}}B = C$, il est clair que $\boxed{PR = RP \iff B = 0.}$

Partie II

II.1. $\min_{x\in E} \|f(x)-v\| = \min_{y\in \operatorname{Im} f} \|y-v\|$, et d'après le cours sur la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien, on sait que ce minimum est égal à la distance $d(v, \operatorname{Im} f)$, et qu'il est atteint si et seulement si $y = p(v)$, où p est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$.

Il suffit donc de prendre pour x_0 un antécédent quelconque de $p(v)$ pour avoir la relation de l'énoncé.

II.2. Si f est injective, $p(v)$ a un antécédent unique. La pseudo-solution est donc unique.

II.3. Par construction, x_0 est pseudo-solution si et seulement si $f(x_0)$ est le projeté orthogonal de v sur $\operatorname{Im} f$, donc si et seulement si pour tout $y \in \operatorname{Im} f$, $f(x_0)-v$ est orthogonal à y, donc si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x_0)-v$ est orthogonal à $f(x)$.

II.4. Avec les notations de l'énoncé et en notant aussi X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$:

$$\langle f(x) \mid f(x_0)-v\rangle = 0 \iff {}^{\mathbf{t}}(AX)(AX_0-V) = 0 \iff {}^{\mathbf{t}}X({}^{\mathbf{t}}AAX_0 - {}^{\mathbf{t}}AV) = 0.$$

Cela équivaut donc au fait que le vecteur de matrice ${}^{\mathbf{t}}AAX_0 - {}^{\mathbf{t}}AV$ dans $\mathcal{B}$ est orthogonal à tout vecteur de E, donc qu'il est nul.

II.5. La 1ère et la 3ème colonne de A sont proporionnelles, donc $\operatorname{rg}(A) = 2$, et $\operatorname{Im} f$ est engendrée par les vecteurs $e_1 = (1,1,-1)$ et $e_2 = (1,1,2)$.

L'énoncé est gentil, ces deux vecteurs sont déjà orthogonaux, donc le projeté orthogonal de v sur $\operatorname{Im} f$ est directement donné par la formule du cours :

$$p(v) = \frac{\langle e_1 \mid v\rangle}{\|e_1\|^2}e_1 + \frac{\langle e_2 \mid v\rangle}{\|e_2\|^2}e_2 = \frac{e_2}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

Les pseudo-solutions x de l'équation $f(x) = v$ s'obtiennent en résolvant l'équation $f(x) = p(v)$, soit, si $x = (a,b,c)$ le système :

$$\begin{cases} a+b-c = \dfrac{1}{2} \\ a+b-c = \dfrac{1}{2} \\ -a+2b+c = 1 \end{cases}$$

On trouve alors que $\boxed{\text{les solutions sont les vecteurs de la forme } x = \left(a, \tfrac{1}{2}, a\right) \text{ avec } a \in \mathbb{R}.}$

Rem: *On aurait pu aussi utiliser la question* **Q4** *et résoudre directement le système* ${}^{\mathbf{t}}AAX = {}^{\mathbf{t}}AV$.

II.6. **a)** En posant $f(\lambda,\mu) = \lambda a + \mu b$ pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, f est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$, et le problème revient à minimiser $\|f(\lambda,\mu)-c\|^2$, soit encore à déterminer les pseudo-solutions de l'équation $f(\lambda,\mu) = c$.

Plus précisément, $\boxed{v = c}$ et $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans les bases canoniques est } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}}$.

b) D'après le théorème du rang f est injective si et seulement si elle est de rang 2, c'est-à-dire si et seulement si $\boxed{a \text{ et } b \text{ ne sont pas colinéaires}}$.

c) L'équation matricielle de **Q4** s'écrit ici :

$$\begin{pmatrix} \|a\|^2 & \langle a \mid b\rangle \\ \langle a \mid b\rangle & \|b\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a \mid c\rangle \\ \langle b \mid c\rangle \end{pmatrix}.$$

Le déterminant $\|a\|^2\|b\|^2 - \langle a \mid b\rangle^2$ n'étant pas nul puisque a et b sont non colinéaires (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on en déduit :

$$\boxed{\begin{cases} \lambda = \dfrac{\|b\|^2\langle a \mid c\rangle - \langle a \mid b\rangle\langle b \mid c\rangle}{\|a\|^2\|b\|^2 - \langle a \mid b\rangle^2} \\[2ex] \mu = \dfrac{\|a\|^2\langle b \mid c\rangle - \langle a \mid b\rangle\langle a \mid c\rangle}{\|a\|^2\|b\|^2 - \langle a \mid b\rangle^2} \end{cases}}$$

Partie III

III.1. **a)** Puisque $\operatorname{Im} f$ et $(\operatorname{Im} f)^{\perp}$ sont supplémentaires :

$$\exists\, (z, y') \in \operatorname{Im} f \times (\operatorname{Im} f)^{\perp} \text{ tel que } y = z + y'.$$

Puisque $z \in \operatorname{Im} f$ il existe $t \in E$ tel que $z = f(t)$, et puisque $\operatorname{Ker} f$ et $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ sont supplémentaires dans E :

$$\exists\, (x, x') \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp} \times \operatorname{Ker} f \text{ tel que } t = x + x'.$$

Et finalement : $y = f(t) + y' = f(x) + f(x') + y' = f(x) + y'$ puisque $x' \in \operatorname{Ker} f$, ce qui est le résultat demandé.

b) Soient (x_1, y_1') et (x_2, y_2') dans $(\operatorname{Ker} f)^{\perp} \times (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ deux couples vérifiant la relation de **a)**.
Alors $f(x_1) + y_1' = f(x_2) + y_2'$, donc $f(x_1 - x_2) = y_2' - y_1'$.
Donc $f(x_1 - x_2) \in \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Im} f)^{\perp}$, d'où $y_1' = y_2'$ et $f(x_1 - x_2) = 0$, donc $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} f$. Mais $x_1 - x_2 \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$, donc $x_1 - x_2 = 0$.
On a donc bien $x_1 = x_2$ et $y_1' = y_2'$, c'est-à-dire l'unicité du couple de **a)**.

c) Soient y_1 et y_2 dans F et λ dans $\mathbb{R}$. On a par définition : $y_1 = f(g(y_1)) + y_1'$ et $y_2 = f(g(y_1)) + y_2'$, avec $g(y_i)$ dans $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ et y_i' dans $(\operatorname{Im} f)^{\perp}$.
Donc $\lambda y_{+} y_2 = f\big(\lambda g(y_1) + g(y_2)\big) + \lambda y_1' + y_2'$. Comme $\lambda g(y_1) + g(y_2) \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ et $\lambda y_1' + y_2' \in (\operatorname{Im} f)^{\perp}$, on a par définition $\lambda g(y_1) + g(y_2) = g(\lambda y_1 + y_2)$: $\boxed{g \text{ est linéaire.}}$

III.2. – Soit $x \in \operatorname{Ker} g$: $x = f(g(x)) + x' = x' \in (\operatorname{Im} f)^{\perp}$. Ainsi : $\operatorname{Ker} g \subset (\operatorname{Im} f)^{\perp}$.
Réciproquement, soit $x \in (\operatorname{Im} f)^{\perp}$: $x = f(g(x)) + x'$ avec $x' \in (\operatorname{Im} f)^{\perp}$, mais on a également $x = f(0) + x$ avec $(0, x) \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp} \times (\operatorname{Im} f)^{\perp}$. D'après l'unicité de cette écriture, $g(x) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker} g$.

On a donc prouvé l'inclusion inverse et finalement : $\boxed{\operatorname{Ker} g = (\operatorname{Im} f)^{\perp}.}$

– Par définition, $\operatorname{Im} g \subset (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.
D'autre part, à l'aide du théorème du rang appliqué à $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et à $g \in \mathscr{L}(F, E)$:

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Im} g &= \dim(F) - \dim(\operatorname{Ker} g) = \dim(F) - \dim((\operatorname{Im} f)^{\perp}) = \dim(\operatorname{Im} f)\\ &= \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim((\operatorname{Ker} f)^{\perp}),\end{aligned}$$

d'où par inclusion et égalité des dimensions : $\boxed{\operatorname{Im} g = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}}$.

III.3. **a)** Si $x \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$, la décomposition élémentaire $f(x) = f(x) + 0_F$ avec $(x, 0) \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp} \times (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ montre que $g \circ f(x) = x \quad (1)$.
Si $x \in \operatorname{Ker} f$, on a évidemment $g \circ f(x) = 0 \quad (2)$.
(1) et (2) montrent, par définition, que $g \circ f$ est la projection sur $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$ c'est-à-dire la projection orthogonale sur $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

b) Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Avec les notations de **1.a)**, on a donc $y' = 0$, donc $y = f(g(y)) \quad (1)$.
Si $y \in (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ on a $y' = y$ donc $f(g(y)) = 0 \quad (2)$.
(1) et (2) montrent, par définition, que $f \circ g$ est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$.

III.4.
Applications numériques non corrigées.