CORRIGÉ DU DS°6 : CCP 2013 PC Maths 1

Partie I : Étude dans un cas particulier

I.1.

I.1.a. On calcule le polynôme caractéristique de A : pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2$. Par conséquent le spectre de A est $\{-2; 1\}$.

I.1.b. $A\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1$, $A\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ne sont pas colinéaires donc $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est une famille libre de deux vecteurs dans $E_1(A)$. Cet espace propre ne peut pas être de dimension strictement supérieure à 2 (ordre de multiplicité de la valeur propre), donc $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est une base de $E_1(A)$.

$A\mathbf{u}_3 = -2\mathbf{u}_3$ et $\mathbf{u}_3$ n'est pas nul donc $\{\mathbf{u}_3\}$ est une base de $E_{-2}(A)$.

Les sous espaces propres d'une matrice sont en somme directe donc $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est une famille libre. Elle est de cardinal 3, égal à la dimension de $\mathbb{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc c'est une base de $\mathbb{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

I.1.c. On vient de trouver une base de $\mathbb{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A donc A est diagonalisable.

Pour les 5/2 : on pouvait aussi remarquer que A *est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable.*

I.1.d. $B\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\mathbf{u}_1$ et de même pour $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ donc aucun élément de $\mathbb{F}$ n'est vecteur propre de B donc a fortiori commun à A et B.

I.2.

I.2.a. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_B(\lambda) = (2-\lambda)^3$ (on développe par rapport à la deuxième ligne) donc le spectre de B est $\{2\}$.

I.2.b. $B-2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Les trois colonnes de cette matrice sont colinéaires à $\mathbf{u}_4$ donc $\mathrm{Im}_2(B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_4)$.

Le théorème du rang nous dit alors que $\dim E_2(B) = 2$.

I.2.c. La somme des dimensions des sous espaces propres de B est égale à $2 < 3$ donc B n'est pas diagonalisable.

I.3.

I.3.a. $B\mathbf{u}_5 = 2\mathbf{u}_5$ et $A\mathbf{u}_5 = \mathbf{u}_5$ donc $\mathrm{Vect}(\mathbf{u}_5) \subset E_1(A) \cap E_2(B)$.
$E_1(A)$ et $E_2(B)$ sont de dimension 2 donc cette intersection est de dimension 1 ou 2 (on a déjà un vecteur non nul dans l'intersection). Si elle est de dimension 2, alors $E_1(A) = E_2(B)$ ce qui est absurde car $\mathbf{u}_1$ est dans $E_1(A)$ mais pas dans $E_2(B)$. Par conséquent l'intersection est de dimension 1 et $E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_5)$.

I.3.b. Comme $\mathbf{u}_3$ n'est pas vecteur propre de B et qu'il engendre $E_{-2}(A)$, il n'y a pas de vecteur propre commun à A et B dans $E_{-2}(A)$. De plus 2 est la seule valeur propre de B donc les vecteurs propres communs à A et B sont dans $E_1(A) \cap E_2(B)$.
D'après la question précédente, les vecteurs propres communs à A et B sont les vecteurs de la forme $\lambda\mathbf{u}_5$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

I.4.

I.4.a. $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ donc $[A, B] = C$.

I.4.b. On calcule le polynôme caractéristique de C. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 & -1 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ -5 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}$. On remplace L_1 par $L_1 - L_3$: $\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ -5 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}$.

On utilise la linéarité par rapport à la première ligne puis on remplace C_1 par C_1+C_3 :

$\chi_C(\lambda)=\lambda\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 6-\lambda & 2\\ -6-\lambda & 3 & -1-\lambda\end{vmatrix}$. Puis on développe par rapport à la première ligne : $\chi_C(\lambda)=\lambda(6-\lambda)(6+\lambda)$.

C possède trois valeurs propres distinctes, donc C est diagonalisable. De plus les valeurs propres de C sont -6, 0 et 6 donc C est semblable à D.
Le rangs de C et de D sont alors égaux et $rg(C)=2$.

Partie II : Condition nécessaire et conditions suffisantes

II.1.

II.1.a. Soient λ et μ tels que $A\mathbf{e}=\lambda\mathbf{e}$ et $B\mathbf{e}=\mu\mathbf{e}$. Alors $AB\mathbf{e}=\mu A\mathbf{e}=\lambda\mu\mathbf{e}$ et de même pour $BA\mathbf{e}$ donc $\mathbf{e}\in\mathrm{Ker}([A,B])$.

II.1.b. $\mathbf{e}$ est non nul (car vecteur propre) donc $\mathrm{Ker}[A,B]$ n'est pas réduit à $\{0\}$, donc est de dimension $\geqslant 1$, et d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}([A,B])<n$.

II.2. On suppose $[A,B]=O_n$. Comme $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, A a au moins une valeur propre : soit $\lambda\in Sp(A)$. $[A,B]=O_n$ donc $\mathrm{Ker}([A,B])=\mathbb{M}_{n,1}(K)$ et $E_\lambda(A)\subset\mathrm{Ker}([A,B])$; de même pour B. Ainsi A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

II.3.

II.3.a. Soit $X\in E_\lambda(A)$. Par hypothèse $X\in\mathrm{Ker}([A,B])$ donc $(AB-BA)X=0$ soit $ABX=BAX$. Or $AX=\lambda X$ donc $A(BX)=\lambda BX$ ce qui signifie que $BX\in E_\lambda(A)$: $\psi : X\mapsto BX$ est une application de $E_\lambda(A)$ dans lui même. De plus, par propriété du produit matriciel, ψ est linéaire donc ψ est un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.

II.3.b. λ est valeur propre de A donc $E_\lambda(A)$ est de dimension non nulle et comme $K=\mathbb{C}$, ψ a au moins une valeur propre : il existe $\mu\in\mathbb{C}$ et $X\in E_\lambda(A)$ non nul tels que $\psi(X)=\mu X$. On a donc $BX=\mu X$, $AX=\lambda X$ et X non nul : X est un vecteur propre commun à A et B.

II.4. En dimension 1, tous les endomorphismes sont des homothéties et vecteurs non nuls en sont des vecteurs propres donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

II.5.

II.5.a. A et B ne vérifient pas $\mathcal{H}$ donc $E_\lambda(A)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}(C)$: il existe $\mathbf{u}\in E_\lambda(A)$ tel que $\mathbf{u}\notin\mathrm{Ker}(C)$: $\mathbf{u}$ est donc un élément de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui vérifie $A\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}$ et $C\mathbf{u}\neq 0$.

II.5.b. Par hypothèse $\mathrm{Im}C$ est de dimension 1 et $\mathbf{v}=C\mathbf{u}$ est un vecteur non nul de cette image donc $\mathrm{Im}C=\mathrm{Vect}(\mathbf{v})$.

II.5.c. $\mathbf{v}=C\mathbf{u}$ donc $\mathbf{v}=AB\mathbf{u}-BA\mathbf{u}=AB\mathbf{u}-\lambda B\mathbf{u}$ soit $\mathbf{v}=(A-\lambda I)(B\mathbf{u})$: $\mathbf{v}\in\mathrm{Im}_\lambda(A)$. La question précédente permet alors de dire que $\mathrm{Im}C\subset\mathrm{Im}_\lambda(A)$.

II.5.d. $\mathrm{Im}C$ est de dimension 1 donc $1\leqslant\dim(\mathrm{Im}_\lambda(A))$.
λ est valeur propre de A donc $E_\lambda(A)$ a une dimension non nulle et, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}_\lambda(A))\leqslant n-1$.
Finalement : $1\leqslant\dim(\mathrm{Im}_\lambda(A))\leqslant n-1$.

II.5.e A et $A-\lambda I_n$ commutent donc $[A,A-\lambda I_n]=O_n$.

Par définition $[B,A-\lambda I_n]=B(A-\lambda I_n)-(A-\lambda I_n)B=BA-AB=-[A,B]$ d'où $[B,A-\lambda I_n]=-C$.

φ et ψ sont des applications linéaires par propriétés du produit matriciel.
Soit $X\in\mathrm{Im}_\lambda(A)$: $X=(A-\lambda I_n)Y$ où $Y\in\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Comme $[A,A-\lambda I_n]=O_n$, $AX=(A-\lambda I_n)(AY)$ donc $AX\in\mathrm{Im}_\lambda(A)$. Par conséquent φ est un endomorphisme de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.

De même $BX=(A-\lambda I_n)(BY)-CY$. $CY\in\mathrm{Im}C$ et $\mathrm{Im}C\subset\mathrm{Im}_\lambda(A)$ donc $CY\in\mathrm{Im}_\lambda(A)$; on a aussi $(A-\lambda I_n)(BY)\in\mathrm{Im}_\lambda(A)$ donc $BX\in\mathrm{Im}_\lambda(A)$. On en conclut que ψ est un endomorphisme de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.

II.5.f. $\mathrm{Im}([\varphi,\psi])\subset\mathrm{Im}(C)$ donc $\mathrm{rg}([\varphi,\psi])\leqslant 1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à φ et ψ, endomorphismes de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$ qui est de dimension non nulle et strictement inférieure à n : φ et ψ ont un vecteur propre commun. A fortiori A et B ont un vecteur propre commun.

II.6. On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

- $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On suppose que $\mathbb{P}_k$ est vérifiée pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Soit E de dimension n et soient φ et ψ deux endomorphismes de E tels que $\operatorname{rg}([\varphi,\psi]) \leqslant 1$.
On considère A et B les matrices associées respectivement à φ et ψ dans une base de E, et $C = AB - BA$.

- Si $\operatorname{rg}(C) = 1$ et si A et B ne vérifient pas $\mathcal{H}$, alors, d'après **II.5.**, A et B ont un vecteur propre commun : φ et ψ ont un vecteur propre commun.
- Si $\operatorname{rg}(C) = 1$ et A, B vérifient $\mathcal{H}$, alors d'après **II.3.**, φ et ψ ont un vecteur propre commun.
- Si $\operatorname{rg}(C) = 0$, alors $[A,B] = 0$ et, d'après **II.2.** et **II.3.**, φ et ψ ont un vecteur propre commun.

On en déduit que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée, ce qui achève la récurrence.

Partie III : Étude d'un autre cas particulier

III.1. $g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^{2n-k}$. On pose $\ell = 2n - k$ pour obtenir $g(P) = \sum_{\ell=0}^{2n} a_{2n-\ell} X^l$.

III.2. Pour tout polynôme P, $\deg P' \leqslant \deg P$ et la dérivation des polynômes est linéaire donc f est un endomorphisme de E.
La question précédente prouve que g est une application de E dans E.
Si $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$g(P + \lambda Q) = X^{2n}(P + \lambda Q)\left(\frac{1}{X}\right) = X^{2n} P\left(\frac{1}{X}\right) + X^{2n} Q\left(\frac{1}{X}\right) = g(P) + \lambda g(Q)$$

donc g est linéaire. g est donc un endomorphisme de E.

III.3.

III.3.a. Soit P un vecteur propre de g et λ la valeur propre associée. $g(P) = \lambda P$.
La question **III.1.** prouve que g est injective donc λ ne peut pas être nul. Par conséquent P et $g(P)$ ont le même degré que l'on appelle d. (P n'est pas nul car vecteur propre).
On reprend les notations de la question **III.1.** $a_d \neq 0$ donc si $k = 2n - d$, $a_{2n-k} \neq 0$ et donc $\deg(g(P)) \geqslant 2n - d$.
Par conséquent $d \geqslant 2n - d$ et donc $\deg(P) \geqslant n$.

III.3.b. $g(X^n) = X^n$ et X^n n'est pas le polynôme nul donc X^n est un vecteur propre de g.

III.4. **III.4.a.** $f^i(P) = P^{(i)}$. $P^{(i)}$ est nul si et seulement si P est un polynôme de degré strictement inférieur à i donc $\operatorname{Ker} f^i = \mathbb{C}_{i-1}[X]$.

III.4.b. Si P est non nul de degré $i - 1$, alors $f^i(P) = 0.P$ donc $0 \in Sp(f^i)$.
$(f^i)^{2n+1} = (f^{2n+1})^i$ et si $P \in E$, sa dérivée d'ordre $2n+1$ est nulle donc X^{2n+1} est un polynôme annulateur de f^i. 0 est sa seule racine donc 0 est la seule valeur propre possible de f^i.
Finalement $\operatorname{Sp}(f^i) = \{0\}$.

III.5. Si $i \geqslant n+1$, $f^i(X^n) = 0.X^n$ donc X^n est vecteur propre de f^i. Avec la question **III.3.b.** on peut en déduire que X^n est un vecteur propre commun à f et g.

On suppose réciproquement que i est tel que f et g ont un vecteur propre commun.
Soit P un tel vecteur propre commun. D'après **III.3.a.**, $\deg(P) \geqslant n$ et d'après **III.4.b.** $P \in \operatorname{Ker} f^i$ donc d'après **III.4.a.** $\deg(P) \leqslant i - 1$. Ainsi, $n \leqslant i - 1$ soit $i \geqslant n+1$.Finalement f et g ont un vecteur propre commun si et seulement si $i \geqslant n+1$.

III.6. $A_n = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n+1}$ où pour i entre 2 et $2n$, $a_{i,i-1} = i - 1$ et tous les autres coefficients sont nuls :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2n \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Pour k entre 0 et $2n$, $g(X^k) = X^{2n-k}$ donc $B_n = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2n+1}$ où pour tout i entre 1 et $2n+1$, $b_{i,2n+2-i} = 1$, tous les autres coefficients étant nuls :

$$B_n = \begin{pmatrix} & 0 & & 1 \\ & & \iddots & \\ & 1 & & 0 \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

III.7.

III.7.a. En prenant $n = 1$ dans la question précédente, on obtient bien $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Un calcul simple donne $A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et A_1^3 est la matrice nulle.

III.7.b. On trouve $[A_1, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2.

$[A_1^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est aussi de rang 2.

III.7.c. Quand $i = 2$, $i \geqslant 1+1$ donc A_1^2 et B_1 ont un vecteur propre commun alors que la condition de la question **II.6.** n'est pas vérifiée ; celle-ci n'est donc pas nécessaire.

Quand $i = 1$, $\mathrm{rg}([A_1, B_1]) < 3$ mais A_1 et B_1 n'ont pas de vecteur propre commun donc la condition de la question **II.1.b.** n'est pas suffisante.

Partie IV : Forme normale pour un vecteur propre

IV.1. $\dim E_\lambda(A) \geqslant 2$ donc on peut considérer deux vecteurs propres X et X' formant une famille libre associés à la valeur propre λ : $X = (x_1, \cdots, x_n)$ et $X' = (x'_1, \cdots, x'_n)$.
Si $x_1 = 0$ alors $X \in \mathcal{N}$.
SI $x_1 \neq 0$, on pose $X'' = x'_1 X - x_1 X'$. Alors $X'' \in \mathcal{N}$ (la première composante de X'' est nulle), X'' n'est pas nul (car (X, X') est libre) et est dans $E_\lambda(A)$ donc X'' est un vecteur propre de A.
Dans tous les cas, A admet un vecteur propre sous forme normale associé à la valeur propre λ.

IV.2.

IV.2.a. Par exemple, soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ tel que $a_{12} = 1$, $a_{21} = -1$, tous les autres coefficients nuls (ceci est possible car $n \geqslant 2$). A n'est pas la matrice nulle et est antisymétrique donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{0_n\}$.

IV.2.b. Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour tous i et j, $m_{ij} = -m_{ji}$ donc en particulier les coefficients diagonaux m_{ii} sont nuls ; comme il y en a un par colonne, on en déduit que les colonnes de M sont des éléments de $\mathcal{N}$.

IV.2.c. Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. La transposition est linéaire et ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ donc

$${}^t(\varphi(M)) = {}^t(AM) + {}^t(M\,{}^tA) = {}^tM\,{}^tA + {}^t({}^tA)\,{}^tM = -M\,{}^tA + A\,{}^tM = -\varphi(M)$$

donc $\varphi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

De même

$$\begin{aligned} {}^t(\psi(M)) &= {}^t(AM\,{}^tA) = A\,{}^tM\,{}^tA \\ &= -\psi(M) \end{aligned}$$

φ et ψ sont donc des applications de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même ; de plus elles sont linéaires par propriétés du produit matriciel donc φ et ψ sont des endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

IV.2.d. Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

$$\varphi \circ \psi(M) = \varphi(AM^tA) = A(AM^tA) + (AM^tA)^tA = A^2M^tA + AM(^tA)^2$$

et par ailleurs

$$\psi \circ \varphi(M) = \psi(AM + M^tA) = A(AM + M^tA)^tA = A^2M^tA + AM(^tA)^2$$

Par conséquent, pour tout $M \in \mathbb{A}_n(\mathbb{C})$, $\varphi \circ \psi(M) = \psi \circ \varphi(M)$ donc $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

IV.3.

IV.3.a.

i) $X_1 \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et ${}^tX_2 \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ donc $X_1^tX_2 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. De même $X_2^tX_1 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ donc $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. De plus

$${}^tB =^t (X_1^tX_2) -^t (X_2^tX_1) = X_2^tX_1 - X_1^tX_2$$

donc $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

ii) On suppose $B = O_n$. Alors $X_1^tX_2 = X_2^tX_1$. On multiplie à droite par $\overline{X_2}$ pour obtenir $X_1({}^tX_2\overline{X_2}) = X_2({}^tX_1\overline{X_2})$. Or ${}^tX_2\overline{X_2}$ et ${}^tX_1\overline{X_2}$ sont des scalaires et (X_1, X_2) est libre (vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes) donc ${}^tX_2\overline{X_2} =^t X_1\overline{X_2} = 0$. En posant $X_2 = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, cela nous donne $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = 0$ et donc $X_2 = 0$ ce qui contredit le fait que X_2 soit un vecteur propre de A.
Par conséquent $B \neq O_n$.

iii) Pour $i = 1$ ou $i = 2$, $AX_i = \lambda_i X_i$ donc ${}^tX_i^tA = \lambda_i^t X_i$.

$$\begin{array}{rcl} AB + B^tA & = & AX_1^tX_2 - AX_2^tX_1 + X_1^tX_2A - X_2^tX_1^tA \\ & = & \lambda_1X_1^tX_2 - \lambda_2X_2^tX_1 + \lambda_2X_1^tX_2 - \lambda_1X_2^tX_1 \\ & = & \lambda_1B + \lambda_2B \end{array}$$

d'où $AB + B^tA = (\lambda_1 + \lambda_2)B$.

iv) De même

$$\begin{array}{rcl} AB^tA & = & (AX_1)({}^tX_2^tA) - (AX_2)({}^tX_1^tA) \\ & = & \lambda_1\lambda_2X_1^tX_2 - \lambda_2\lambda_1X_2^tX_1 \end{array}$$

d'où $AB^tA = (\lambda_1\lambda_2)B$.

IV.3.b. A et I_n commutent donc $(A - \lambda_1I_n)(A - \lambda_2I_n)B = A^2B - (\lambda_1 + \lambda_2)AB + \lambda_1\lambda_2B$. On multiplie la relation **iii)** par A à gauche : $A^2B + AB^tA = (\lambda_1 + \lambda_2)AB$ donc $(A - \lambda_1I_n)(A - \lambda_2I_n)B = -AB^tA + \lambda_1\lambda_2B$. D'après **iv)**, on conclut $(A - \lambda_1I_n)(A - \lambda_2I_n)B = O_n$.

IV.3.c. $B \neq O_n$ donc l'une au moins des colonnes de B est non nulle ; soit C une colonne de B non nulle. $(A - \lambda_2I_n)B = 0_n$ donc $(A - \lambda_2I_n)C = 0_{n,1}$ soit $AC = \lambda_2C$. C n'est pas nulle donc C est un vecteur propre de A.
De plus $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ donc $C \in \mathbb{N}$. C, une des colonnes de B, est donc un vecteur propre de A sous forme normale.

IV.3.d. $(A - \lambda_2I_n)B \neq O_n$ donc il existe X une colonne de $(A - \lambda_2I_n)B$ non nulle. Il existe alors U une des colonnes de B telle que $X = (A - \lambda_2I_n)U$. D'après la question b., X est un vecteur propre de A (associé à la valeur propre λ_1 et λ_2 est une valeur propre de A, $U \in \mathbb{N}$. Finalement X est donc un vecteur propre de A sous forme normale.

IV.4.

IV.4.a. φ et ψ sont deux endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ tels que $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) = 0 \leqslant 1$ donc, d'après la partie **II**, φ et ψ ont un vecteur propre commun : il existe $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ non nulle vecteur propre de φ et de ψ ; il existe donc $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi(B) = \alpha B$ soit $AB + B^tA = \alpha B$ et il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $AB^tA = \beta B$.

IV.4.b. On multiplie **i)** par A à gauche : $A^2B + AB^tA = \alpha AB$ mais $AB^tA = \beta B$ donc $A^2B + \beta B = \alpha AB$. En factorisant par B, on obtient $(A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = O_n$.

IV.4.b. Le polynôme $X^2-\alpha X+\beta$ à coefficients complexes a deux racines (éventuellement confondues) donc il existe $(\gamma,\delta)\in\mathbb{C}^2$ tel que $X^2-\alpha X+=(X-\gamma)(X-\delta)$. Alors $A^2-\alpha A+\beta I_n=(A-\alpha I_n)(A-\beta I_n)$ et, la relation de la question précédente devient : $(A-\gamma I_n)(A-\delta I_n)B=O_n$.

IV.4.d. On suppose $(A-\delta I_n)B=O_n$ donc, si $A-\delta I_n$ est inversible, alors $B=O_n$ ce qui est exclu donc $A-\delta I_n$ n'est pas inversible et $\delta\in\mathrm{Sp}(A)$. Une colonne non nulle de B est alors un vecteur propre de A sous forme normale.

IV.4.e. Si $\delta=\lambda$ et $(A-\delta I_n)B\neq O_n$.
Soit X une colonne non nulle de $(A-\delta I_n)B$ et U la colonne de B telle que $X=(A-\delta I_n)U$. $U\in\mathcal{N}$, $\delta\in\mathrm{Sp}(A)$ et $(A-\gamma I_n)X=0_{n,1}$ (d'après **IV.4.c.**) donc X est un vecteur propre de A sous forme normale.

IV.4.f. A n'a qu'une valeur propre λ et $\delta\neq\lambda$ donc δ n'est pas valeur propre de A et $(A-\delta I_n)$ est inversible.
$A-\gamma I_n$ et $A-\delta I_n$ commutent donc si on multiplie à gauche la relation de la question **IV.4.c.** par $(A-\delta I_n)^{-1}$, on obtient $(A-\gamma I_n)B=O_n$.

IV.4.g. On est alors revenu à la situation de la question **IV.4.d.** et donc A possède un vecteur propre sous forme normale.
On considère une matrice $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque.
A a au moins une valeur propre.
Si A a une seule valeur propre, d'après **IV.4.**, A possède un vecteur propre sous forme normale.
Si A a au moins deux valeurs propres distinctes, alors d'après **IV.3.**, A possède un vecteur propre sous forme normale.
On en conclut que, dans tous les cas, une matrice A de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ possède un vecteur propre sous forme normale.
