CORRIGÉ MINES PSI 2016

A. Exemples

1. Le polynôme caractéristique de D est $\chi_D = X^2 + 1$.
Il n'a aucune racine réelle et le spectre dans $\mathbb{R}$ de D est vide. A fortiori D n'a aucune valeur propre réelle non nulle et D est quasi-nilpotente dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Le spectre dans $\mathbb{C}$ de D est $\{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ et contient au moins un élément non nul donc D n'est pas quasi-nilpotente dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Le polynôme caractéristique de B est $\chi_B = X^2 - \mathrm{Tr}(B)X + \det(B) = X^2$.
Ainsi, le spectre de B est $\{0\}$ et ne contient aucun élément non nul. B est quasi-nilpotente dans $\mathrm{mat}_2(\mathbb{C})$.

3. *Questions de cours...*

- $S_n(\mathbb{K})$ est le noyau de l'application linéaire $M \mapsto M - {}^tM$ et est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- $A_n(\mathbb{K})$ est le noyau de l'application linéaire $M \mapsto M + {}^tM$ et est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est non vide (il contient O_n) et est stable par combinaisons linéaires (vérification immédiate). C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Montrons que

$$S_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(\{E_{i,j} + E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\} \cup \{(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}\}\right).$$

En effet :

- les matrices $E_{i,j} + E_{j,i}$ et $E_{i,i}$ sont bien dans $S_n(\mathbb{K})$.
- si $S \in S_n(\mathbb{K})$, on a :

$$S = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) + \sum_{i=1}^{n} s_{i,i}E_{i,i} \in \mathrm{Vect}\left(\{E_{i,j} + E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\} \cup \{(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}\}\right).$$

On remarque ensuite que la famille $\left(\{E_{i,j} + E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\} \cup \{(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}\}\right)$ est libre (on considère une combinaison linéaire nulle et on a immédiatement la nullité des coefficients en reprenant le calcul ci-dessus). Il reste alors à compter le nombre des éléments de cette famille qui est une base de $S_n(\mathbb{K})$:

$$\dim(S_n(\mathbb{K})) = \sum_{i=1}^{n}(n-i) + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}\cdot$$

4. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux et donc :

$$\forall T \in T_n^{++}(\mathbb{K}),\ \mathrm{Sp}(T) = \{0\}.$$

Ceci montre que $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est quasi-nilpotent. Comme dans la question précédente, on montre que

$$T_n^{++}(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(\{E_{i,j},\quad 1 \leqslant i < j \leqslant n\}\right).$$

La famille étant libre (comme sous-famile de la base canonique), c'est une base de $T_n^{++}(\mathbb{K})$ et :

$$\dim(T_n^{++}(\mathbb{K})) = \sum_{i=1}^{n}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2}\cdot$$

5. Notons que si $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXY$ peut s'interpréter comme le produit scalaire $\langle X \,|\, Y\rangle$ de X et Y vus comme éléments de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$ et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$${}^tXAX = \langle X \,|\, AX\rangle = \langle AX \,|\, X\rangle = {}^t(AX)X = {}^tX{}^tAX = -{}^tXAX.$$

(*Pour obtenir cette relation, on pouvait aussi remarquer, sans faire appel au produit scalaire, que* ${}^tXAX$ *est un réel, donc égal à sa transposée.)*

On en déduit donc que ${}^tXAX = 0$. En particulier, si λ est une valeur propre de A et X un vecteur propre associé alors :

$$0 = {}^tXAX = \lambda\|X\|^2$$

et comme $X \neq 0$ (vecteur propre), $\lambda = 0$. 0 est donc la seule valeur propre réelle possible pour A. On a montré que $A_n(\mathbb{R})$ est quasi-nilpotent.

6. Comme $n \geqslant 2$, on peut considérer la matrice M définie par blocs par $M = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A_n(\mathbb{R})$. On a

$$\chi_M = X^{n-2}\chi_D = X^{n-2}(X^2+1),$$

et le spectre dans $\mathbb{C}$ de M est soit égal à $\{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ (cas $n=2$) soit égal à $\{0, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ (cas $n \geqslant 3$). Si, par l'absurde, il existait une matrice P comme dans l'énoncé, M serait semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à un élément de $T_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc à une matrice dont 0 est la seule valeur propre complexe.
Le spectre étant un invariant de similitude, on obtient une contradiction.
Il n'existe donc pas de P comme dans l'énoncé.

B. Cas réel

7. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. S est alors diagonalisable (théorème spectral). Si 0 est sa seule valeur propre réelle possible, S est alors semblable à une matrice diagonale nulle et est donc nulle.
Réciproquement, O_n est symétrique et quasi-nilpotente. La matrice nulle est ainsi la seule matrice symétrique quasi-nilpotente.

La question 2 montre que le résultat est faux dans le cas complexe (on a trouvé une matrice symétrique complexe quasi-nilpotente qui n'est pas nulle).

8. Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, quasi-nilpotent dans $M_n(\mathbb{R})$. D'après la question précédente $V \cap S_n(\mathbb{R}) = \{\mathrm{O}_n\}$ et donc V et $S_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe. Ainsi

$$\dim(V) \leqslant \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}\,.$$

C. Lemme des colonnes

9. La seule matrice quasi-nilpotente de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est la matrice nulle (puisqu'une matrice de taille 1 a une unique valeur propre égale à son unique coefficient). Le lemme des colonnes est donc vrai dans le cas $n=1$.

10. Un calcul de déterminant par blocs montre que si $M \in V'$ alors :

$$\chi_M = X\chi_{K(M)}\,.$$

Les valeurs propres non nulles de $M \in V'$ et celles de $K(M)$ sont donc les mêmes. Si V' est quasi-nilpotent alors $K(V')$ l'est aussi.

11. D'après l'hypothèse de récurrence appliqué à $K(V')$ (sous-espace quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$), il existe un élément $j \in [\![1\,;n-1]\!]$ tel que $C_j(K(V')) = \{0\}$. D'après l'hypothèse par l'absurde, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $C_k(V) \neq \{0\}$. En appliquant cela avec $k=j$, il existe une matrice M non nulle dans $C_j(V)$. Comme $j<n$, $M \in V'$ et donc $K(M) \in K(V')$. Comme $M \in C_j(V)$, on a aussi $K(M)$ qui a toutes ses colonnes nulles sauf peut-être la j-ème.
Finalement, $K(M) \in C_j(K(V'))$ et donc $K(M) = 0$ (voir ci-dessus).
M a ainsi une unique colonne qui peut être non nulle (celle de numéro j) et seul le dernier coefficient $m_{n,j}$ de cette colonne peut être non nul.

Comme $M \neq 0$, $m_{n,j} \neq 0$ et $M = m_{n,j}E_{n,j}$. Puisque V' est un sous-espace vectoriel, $E_{n,j} = \dfrac{1}{m_{n,j}}M \in V' \subset V$.

12. u_σ transforme la base $(e_1, \dots, e_n)$ en $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ qui est aussi une base. Cette application linéaire est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}'$.
$(u_\sigma)^{-1}$ envoie $e_{\sigma(i)}$ sur e_i pour tout i et donc e_k sur $e_{\sigma^{-1}(k)}$ pour tout k. On a donc

$$(u_\sigma)^{-1} = u_{\sigma^{-1}}\,.$$

On pouvait aussi vérifier $u_{\sigma^{-1}} \circ u_\sigma(e_j) = e_j$ *pour tout* j, *ce qui prouve* $u_{\sigma^{-1}} \circ u_\sigma = \mathrm{Id}_E$ *et permet de répondre aux deux questions en même temps.*

13. La colonne j de la matrice de u_σ dans la base canonique est la colonne $e_{\sigma(j)}$. Elle a tous ses coefficients nuls sauf celui en ligne $\sigma(j)$. Son coefficient générique est donc $\delta_{i,\sigma(j)}$. On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(u_\sigma) = P_\sigma$$

On en déduit que P_σ est inversible et que

$$(P_\sigma)^{-1} = \mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(u_\sigma^{-1}) = P_{\sigma^{-1}} = (\delta_{i,\sigma^{-1}(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (\delta_{\sigma(i),j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\,.$$

Lorsque l'on munit $\mathbb{R}^n$ *de sa structure euclidienne canonique,* P_σ *est la matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale donc c'est une matrice orthogonale, ce qui montre directement* $(P_\sigma)^{-1} = {}^tP_\sigma$.

14. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. P_σ étant la matrice de changement de base de la base (e_i) à la base $(e_{\sigma(i)})$, d'après la formule de changement de base du cours :

$$P_\sigma^{-1}MP_\sigma = \mathrm{Mat}_{(e_{\sigma(i)})}(g)\,.$$

Le coefficient de cette matrice situé ligne i et colonne j est par définition la coordonnée sur $e_{\sigma(i)}$ de $g(e_{\sigma(j)})$. Or :

$$g(e_{\sigma(j)}) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,\sigma(j)}e_k = \sum_{\ell=1}^{n} m_{\sigma(\ell),\sigma(j)}e_{\sigma(\ell)}\,,$$

en ayant fait le changement d'indice $k=\sigma(\ell)$ (σ bijection de $[\![1\,;n]\!]$ sur lui-même).
Finalement,

$$P_\sigma^{-1}MP_\sigma = (m_{\sigma(i),\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\,.$$

Rem : l'utilisation des formules de changement de base, d'ailleurs indiquée par l'énoncé, semble ici la plus naturelle. Néanmoins, on pouvait faire un calcul « bourrin » :

$$\forall (i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2,\quad \left(P_\sigma^{-1}MP_\sigma\right)_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(P_\sigma^{-1}\right)_{i\ell}m_{\ell k}\left(P_\sigma\right)_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\sigma^{-1}(\ell)}m_{\ell k}\delta_{k,\sigma(j)} = m_{\sigma(i)\sigma(j)}\,.$$

15. V^σ est l'image de V par l'application linéaire $M\mapsto P_\sigma^{-1}MP$ et c'est donc un espace vectoriel.

Le spectre étant un invariant de similitude, le caractère quasi-nilpotent des éléments de V entraîne celui de ceux des éléments de V^σ et V^σ est un sous-espace quasi-nilpotent de $M_n(\mathbb{K})$.

Enfin, soit $j\in[\![1\,;n]\!]$. D'après l'hypothèse par l'absurde, on peut trouver M non nulle dans $C_j(V)$, c'est-à-dire dont toutes les colonnes sont nulles sauf peut-être la j-ième.
D'après le calcul précédent, pour une permutation σ de $[\![1\,;n]\!]$, la matrice $P_\sigma^{-1}MP_\sigma$ a toutes ses colonnes nulles sauf peut-être la $\sigma^{-1}(j)$-ième. Cette matrice, comme M, est non nulle, et appartient à $C_{\sigma^{-1}(j)}(V^\sigma)$.
Puisque σ est bijective, lorsque j décrit $[\![1\,;n]\!]$ il en est de même de $k=\sigma^{-1}(j)$ don on a montré que :

$$\forall k\in[\![1\,;n]\!],\ C_k(V^\sigma)\neq\{0\}.$$

16. V^σ et V ont les mêmes propriétés (sous-espaces quasi-nilpotents tels que pour tout k, $C_k(V^\sigma)\neq\{0\}$).
Pour tout σ, on peut donc appliquer la question 11 à V^σ et dire qu'il existe $k\in[\![1\,;n-1]\!]$ tel que $E_{n,k}\in V_\sigma$ ou encore que $P_\sigma E_{n,k}P_\sigma^{-1}\in V$.

D'après la question 14, pour tout choix de σ on a $P_\sigma^{-1}E_{u,v}P_\sigma = E_{\sigma^{-1}(u),\sigma^{-1}(v)}$ (en effet en notant $N=P_\sigma^{-1}E_{u,v}P_\sigma$, on a $N_{i,j}$ qui est égal au coefficient $(\sigma(i),\sigma(j))$ de $E_{u,v}$ et est nul sauf si $\sigma(i)=u$ et $\sigma(j)=v$).
En appliquant ceci avec σ^{-1}, on a donc $P_\sigma E_{n,k}P_\sigma^{-1}=E_{\sigma(n),\sigma(k)}$.
Soit $j\in[\![1\,;n]\!]$. Appliquons ce qui précède avec σ la bijection qui se contente de permuter j et n en laissant les autres éléments invariants (c'est l'identité si $j=n$). On trouve alors $k\in[\![1\,;n-1]\!]$ tel que $E_{\sigma(n),\sigma(k)}=E_{j,\sigma(k)}\in V$. On a bien sûr $\sigma(k)\neq j$ car $k\neq n$ et σ est une bijection qui envoie déjà n sur j.
On a donc prouvé que

$$\forall j\in[\![1\,;n]\!],\ \exists\, f(j)\neq j/\ E_{j,f(j)}\in V$$

17. Posons $i_1=1$ et, pour tout $k\geqslant 2$, $i_k=f(i_{k-1})$. L'ensemble $\{i_k\mid k\in\mathbb{N}^*\}$ est inclus dans $[\![1\,;n]\!]$ et donc fini. Or, $\mathbb{N}^*$ est infini. Il existe donc deux i_k égaux pour des valeurs de k différentes : $i_a=i_b$ avec $a<b$.
En partant de i_a et en itérant successivement par f, on finit par retomber sur i_a. On regarde la première fois où on retrouve i_a et ce n'est pas à la première itération car $f(j)\neq j$ pour tout j. On trouve des indices $i_a,i_{a+1},\dots,i_{a+p-1}$ avec $p\geqslant 2$ deux à deux distincts images succesifs les uns des autres par f et avec $f(i_{a+p-1})=f(i_a)$.
En posant $j_1=i_a$, $j_2=i_{a+1}$, …, $j_p=i_{a+p-1}$, on a des éléments deux à deux distincts et

$$\forall k\in[\![1\,;p-1]\!],\ f(j_k)=j_{k+1}\ \text{ et }\ f(j_p)=j_1$$

18. Un algorithme possible est le suivant.

Algorithme 1 :

Données : f : une application de $[\![1\,;n]\!]$ dans lui-même sans point fixe
Résultat : un cycle pour f

```
/* on commence par chercher les éléments i_a et i_b */;
liste = [1];
k = 1;
tant que f(k) ∉ liste faire
    liste.append(f(k));
    k = f(k)
fintq
/* à la sortie de la boucle, f(k) contient i_a */;
i = f(k);
liste =[i];
k = f(i);
tant que k! = i faire
    liste.append(k);
    k = f(k)
fintq
```

19. N est une matrice comportant p coefficients non nuls, égaux à 1.
Plus précisément, il y a un coefficient 1 sur chaque ligne $j_1, \dots, j_p$ et aussi un sur chaque colonne $f(j_1), \dots, f(j_p) = j_2, \dots, j_p, j_1$. On en déduit que le vecteur $\sum_{k=1}^{p} e_{j_k}$ est un vecteur propre pour N associé à la valeur propre 1.
Ceci est contradictoire car $N \in V$ (comme somme d'éléments de V qui est un espace vectoriel) et ne devrait posséder aucune valeur propre non nulle. Ceci achève le raisonnement par l'absurde.

D. Cas général

20. Soit $M \in V$ telle que $L(M) = 0$ et $K(M) = 0$. Puisque $C_n(V) = 0$, ces conditions impliquent que $M = 0$. Autrement dit, $\operatorname{Ker} L \cap \operatorname{Ker} K = \{0\}$.
La formule du rang appliquée à la restriction de K à $W = \operatorname{Ker} L$ donne alors :

$$\dim(K(W)) = \operatorname{rg}(K|_W) = \dim W - \dim(\operatorname{Ker} K|_W) = \dim W - \dim(\operatorname{Ker} K \cap W) = \dim W\,.$$

Or la formule du rang appliquée à L donne :

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} L + \operatorname{rg} L = \dim W + \operatorname{rg} L\,,$$

donc $\dim V = \dim(K(W)) + \operatorname{rg} L$, et puisque $\operatorname{rg} L \leqslant \dim(\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K}) = n-1$, on a l'inégalité cherchée :

$$\dim(V) = \leqslant \dim(K(W)) + n - 1\,.$$

21. Soit $M \in W$; on a $M = \begin{bmatrix} K(M) & R(M) \\ 0 & a(M) \end{bmatrix}$ qui est quasi nilpotente (car dans V) et ses valeurs propres sont celles de $K(M)$ et $a(M)$. Ainsi $K(M)$ n'a pas de valeur propre non nulle (et $a(M) = 0$). Ceci montre que l'espace vectoriel $K(W)$ est quasi-nilpotent. D'après l'hypothèse de récurrence, sa dimension est plus petite que $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.
La question précédente donne alors

$$\dim(V) \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}\,.$$

22. D'après le lemme des colonnes, il existe j tel que $C_j(V) = \{0\}$. Considérons la permutation σ qui échange j et n. V^σ est alors isomorphe à V et est un espace vectoriel quasi-nilpotent auquel on peut appliquer le cas précédent. On a donc :

$$\dim(V) = \dim(V^\sigma) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}\,.$$