# CORRIGÉ DU DS°2

## SUJET n°2 : CENTRALE PC 2016

# I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

## I.A - L'opérateur de translation

**I.A.1)** Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré $d = \deg(P)$ (i.e. $a_d \neq 0$).

Alors, $\tau(P)$ s'écrit :

$$\tau(P) = P(X+1) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k .$$

Comme $a_d \neq 0$ :

$$\boxed{\deg(\tau(P)) = \deg(P) \text{ et } \operatorname{cd}(\tau(P)) = \operatorname{cd}(P).}$$

**I.A.2)** On vérifie facilement par récurrence :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \tau^k(P)(X) = P(X+k).}$$

**I.A.3)** D'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall j \in [\![1\,;n+1]\!],\ \tau(P_j)(X) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} P_i .$$

$M$ est donc triangulaire supérieure et les coefficients de $M$ sont donnés par :

$$\boxed{\forall i,j \in [\![1\,;n]\!],\ M_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

On peut noter que, compte tenu des conventions habituelles sur les coefficients binomiaux, la formule $M_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ rest valable pour $i > j$.

**I.A.4)** La matrice $M$ est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. Il s'agit des nombres $\binom{j-1}{j-1} = 1$. Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{Sp}(\tau) = \{1\}.}$$

Si $M$ était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice unité, et donc elle serait égale à la matrice unité.Ainsi,

$$\boxed{\tau \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

**I.A.5)** $M$ étant triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux tous égaux à $1$, elle est inversible donc :

$$\boxed{\tau \text{ est bijective.}}$$

Puis si on considère l'application $\overline{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X-1)$, on vérifie aisément qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il vérifie : $\tau \circ \overline{\tau} = \overline{\tau} \circ \tau = \mathrm{id}$ car :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \tau(\overline{\tau}(P))(X) = \overline{\tau}(P)(X+1) = P(X) = \tau(\overline{\tau}(P))(X)$$

Donc

$$\boxed{\tau^{-1}(P)(X) = P(X-1).}$$

Puis, comme pour la question 2), on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau^{-k}(P)(X) = P(X-k)$. Donc la formule est toujours vraie :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \tau(P)(X) = P(X+k).}$$

**I.A.6)** Avec l'expression de $\tau^{-1}$, on applique la même méthode qu'en 3) et on obtient :

$$\forall j \in [\![1\,;n+1]\!],\ \tau^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1}\binom{j-1}{h}(-1)^{j-1-h}X^h = \sum_{i=1}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}P_i\,.$$

Puis :

$$\boxed{\forall i,j \in [\![,\ ;\ ]\!] (M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}}$$

**I.A.7)** La $k+1^{\text{e}}$ ligne du calcul $V = Q \times U$ donne :

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j}u_{j-1} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}u_j = \sum_{j=1}^{k+1}\binom{k}{j-1}u_{j-1}\,.$$

On peut choisir : $Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour} \quad j \leqslant k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On a donc :

$$\boxed{Q = {}^tM\,.}$$

**I.A.8)** $M$ est inversible, donc $Q = {}^tM$ également et $Q^{-1} = ({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$.
De plus : $V = Q \times U \iff U = Q^{-1} \times V = {}^t(M^{-1}) \times V$.
La $k+1^{\text{e}}$ ligne de ce calcul donne alors :

$$u_k = \sum_{j=1}^{n+1}\left({}^t(M^{-1})\right)_{k+1,j}v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1}\left((M^{-1})\right)_{j,k+1}v_{j-1} = \sum_{j=0}^{n}\left((M^{-1})\right)_{j+1,k+1}v_j\,.$$

$$\boxed{u_k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}v_j\,.}$$

**I.A.9)** On a ici :

$$\boxed{v_k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\lambda^j = (\lambda+1)^k\,.}$$

On vérifie bien :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}v_j = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\lambda+1)^j(-1)^{k-j} = ((\lambda+1)-1)^k = u_k\,.}$$

## I.B - L'opérateur de différence

**I.B.1)** Avec les mêmes notations qu'en $1.A.1)$, avec $P$ *non constant* on a :

$$\delta(P)(X) = a_dX^d + (da_d + a_{d-1})X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2}b_kX^k - a_dX^d - a_{d-1}X^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2}a_kX^k = da_dX^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2}c_kX^k\,.$$

Comme $a_d \neq 0$ :

$$\boxed{\text{si } P\text{, non constant, } \deg(\delta(P)) = \deg(P)-1 \text{ et } \mathrm{cd}(\delta(P)) = \deg(P)\times\mathrm{cd}(P)\,.}$$

**I.B.2)** D'après la question précédente, si $P$ n'est pas constant, $\deg(P) \geqslant 1$ et $\deg(\delta(P)) \geqslant 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi, si $\delta(P) = 0$, alors $P$ est constant.
Réciproquement, si $P$ est constant, le calcul direct donne $\delta(P) = 0$.
Donc :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X]\,.}$$

La question précédente montre aussi que $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or d'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Im}(\delta)) = n+1-\dim(\mathrm{Ker}(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$.
Donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]\,.}$$

**I.B.3)** On montre la propriété demandée par récurrence sur $j$.
On vient de voir qu'elle est vraie pour $j=1$ ; si $\mathrm{Ker}(\delta^j)=\mathbb{R}_{j-1}[X]$, avec $j<n$, alors :

$$P\in \mathrm{Ker}(\delta^{j+1}) \iff \delta^{j+1}(P)=0=\delta^j(\delta(P)) \iff \delta(P)\in\mathbb{R}_{j-1}[X],$$

donc :

$$P\in \mathrm{Ker}(\delta^{j+1}) \iff \deg(P)=\deg(\delta(P))+1\leqslant (j-1)+1=j \iff P\in\mathbb{R}_j[X].$$

Ainsi, par récurrence :

$$\boxed{\forall j\in [\![1\,;n]\!],\ \mathrm{Ker}(\delta^j)=\mathbb{R}_{j-1}[X].}$$

Si $P\in\mathrm{Im}(\delta^j)$, alors il existe $Q\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P=\delta^j(Q)$.
Or une récurrence simple (suite arithmétique) montre que $\deg P=\deg(Q)-j$, donc $\deg(P)\leqslant n-j$.
Par conséquent, $P\in\mathbb{R}_{n-j}[X]$, et donc $\mathrm{Im}(\delta^j)\subset\mathbb{R}_{n-j}[X]$.
Le théorème du rang assure par ailleurs que ces deux espaces ont même dimension, donc :

$$\boxed{\forall j\in [\![1\,;n]\!],\ \mathrm{Im}(\delta^j)=\mathbb{R}_{n-j}[X]}$$

**I.B.4)** On a : $\delta=\tau-\mathrm{id}$ ; puisque $\tau$ et $\mathrm{id}$ commutent, on a d'après la formule du binôme :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \delta^k=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\tau^j.}$$

**I.B.5)** Si $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]=\mathrm{Ker}(\delta^n)$, alors $\delta^n(P)=0$. Donc :

$$0_{\mathbb{R}[X]}=[\delta^n(P)](X)=[\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\tau^j(P)](X)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}[\tau^j(P)(X)]=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(X+j).$$

Et en particulier en la valeur réelle $X=0$ :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(j)=0.}$$

**I.B.6)** a) $u\circ\delta^2=u\circ[u^2\circ u^2]=u^5=[u^2\circ u^2]\circ u=\delta^2\circ u$.
Donc

$$\boxed{u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent.}}$$

On pouvait aussi remarquer directement qu $\delta^2$ est un polynôme en $u$, donc commute avec $u$ d'après un résultat du cours.

b) Soit $P\in\mathbb{R}_1[X]=\mathrm{Ker}\,\delta^2$, alors :

$$\delta^2(u(P))=u(\delta^2(P))=u(0)=0$$

Donc $u(P)\in\mathrm{Ker}(\delta^2)=\mathbb{R}_1[X]$.
Par conséquent :

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u.}$$

On pouvait aussi employer directement un théorème du cours : le noyau de tout polynôme en $u$ est stable par $u$.

c) Si $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ vérifie $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & a\\ 0 & c\end{pmatrix}=A\times A^2=A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix} c & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Donc $a=d$ et $c=0$, ainsi $A=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$, puis $A^2=\begin{pmatrix} a^2 & 2ab\\ 0 & a^2\end{pmatrix}$, et ainsi nécessairement $a=0$, puis $2ab=0$ ; ce qui est contradictoire avec $ab=1$.
Donc

$$\boxed{\text{aucune matrice } A \text{ ne vérifie } A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.}$$

*Autre démonstration, plus savante :* si $A$ vérifiait la relation demandée, on aurait $A^4=(A^2)^2=0$. Donc $A$ serait nilpotente, et comme l'indice de nilpotence d'un endomorphisme est inférieur ou égal à la dimension, on devrait avoir $A^2=0$, ce qui est contradictoire.

d) Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par $u$, notons $\tilde{u}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X]\\ P & \longmapsto & u(P)\end{array}\right.$ l'endomorphisme induit.
Considérons alors $A$, la matrice de $\tilde{u}$ dans la base $(P_1, P_2)$ de $\mathbb{R}_1[X]$.
Alors $A^2$ est égale à la matrice de $\delta|_{\mathbb{R}_1[X]}$ donc à $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
Or d'après la question précédente, ceci est impossible. Donc :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } u^2 = \delta\,.}$$

**I.B.7)** a) On a vu (questions $I.B.3)$) que $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$.
Ainsi, la famille $(P, \delta(P), \ldots \delta^d(P))$ est une famille de $d+1$ polynômes de degrés échelonnés (de $d$ à $0$).

$$\boxed{\text{C'est une famille libre et } \mathrm{vect}(P, \delta(P), \ldots \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]\,.}$$

b) Soit $V$ stable par $\delta$.

- Si $P \in V$ est de degré $d$, alors $\delta^i(P) \in V$ pour tout $i$ et donc $\mathbb{R}_d[X] = \mathrm{vect}(P, \delta(P), \ldots \delta^d(P)) \subset V$.
- $V$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $d = \dim(V) - 1$ et $(e_0, \ldots e_d)$ une base de $V$.
  Nécessairement, l'un des $e_i$ est un polynôme de degré supérieur ou égal à $d$, sinon, on aurait une famille libre de $d+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_d[X]$, ce qui est impossible.
  Donc il existe $P$ dans $V$ de degré $r \geqslant d$.
  Si $\deg P = r > d$, alors d'après la remarque précédente, $\mathbb{R}_r[X] = \mathrm{vect}(P, \delta(P), \ldots \delta^r(P)) \subset V$ et $V$ ne peut être de dimension $d+1$. Donc il existe $P$ de degré $d$ dans $V$ et $\mathbb{R}_d[X] \subset V$ et par égalité des dimensions :

$$\boxed{\text{il existe } d \in [\![0, n]\!] \text{ tel que } V = \mathbb{R}_d[X]\,.}$$

# II Applications en combinatoire

## II.A - Quelques cas particuliers

**II.A.1)** Si $\varphi$ est une surjection de $E$ sur $F$, alors nécessairement $\mathrm{card}(F) \leqslant \mathrm{card}(E)$. Donc :

$$\boxed{\text{si } n > p, \text{ alors } S(p, n) = 0.}$$

**II.A.2)** Une surjection d'un ensemble de cardinal $n$ sur un ensemble de cardinal n est en fait une bijection. Donc :

$$\boxed{S(n, n) = n!}$$

**II.A.3)** Les surjections de $[\![1\,;n+1]\!]$ sur $[\![1\,;n]\!]$ sont parfaitement déterminées de manière unique par :
- le choix de deux éléments de $[\![1\,;n+1]\!]$ qui auront la même image : $\binom{n+1}{2}$ possibilités;
- puis, la distribution des $n$ éléments de l'ensemble d'arrivée, avec les $n$ éléments de l'ensemble de départ (un de ces éléments étant double) : $n!$ possibilités .

Le cardinal recherché est donc le produit :

$$\boxed{S(n+1, n) = \binom{n+1}{2} n! = \frac{n \times (n+1)!}{2}\cdot}$$

## II.B - Recherche d'une expression générale

**II.B.1)** Une application de $E = [\![1\,;p]\!]$ sur l'ensemble $F = [\![1\,;n]\!]$ est parfaitement définie de manière unique par la donné pour chacun des $p$ élément de $E$ d'un unique élément de $F$. Donc pour chacun des $p$ éléments de $E$, il y a $n$ possibilités. Le cardinal recherché est donc le produit :

$$\boxed{\text{le nombre d'applications de } [\![1\,;p]\!] \text{ sur } [\![1\,;n]\!] \text{ est donc } n \times n \cdots \times n = n^p\,.}$$

**II.B.2)** Notons $I_k = \{\varphi : [\![1\,;p]\!] \to [\![1\,;n]\!] \mid \mathrm{card}(\mathrm{Im}\,\varphi) = k\}$. Alors, d'après la question précédente :

$$n^p = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{card}(I_k).$$

Il reste à dénombrer $I_k$. Or les applications $\varphi$ de $I_k$ sont parfaitement déterminées par :

– le choix des $k$ éléments de $[\![1\,;n]\!]$ qui forment $\operatorname{Im}\varphi$ : il y a $\binom{n}{k}$ possibilités ;

– puis, le choix des surjections de $[\![1\,;p]\!]$ sur l'ensemble $\operatorname{Im}\varphi$ à $k$ éléments : $S(p,k)$ possibilités .

Donc $\operatorname{card}(I_k)=\binom{n}{k}S(p,k)$ puis :

$$\boxed{n^p=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}S(p,k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S(p,k)\,.}$$

avec la convention $S(p,0)=0$.

**II.B.3)** On applique alors la formule d'inversion trouvée en $I.A.8)$ :

$$v_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k \Longleftrightarrow u_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}v_k\,,$$

avec $v_n=n^p$, $u_k=S(p,k)$, donc

$$\boxed{\forall p\geqslant n,\ S(p,n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p\,.}$$

**II.B.4)** Pour $p<n$, le polynôme $P=X^p$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après $I.B.5)$,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(k)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p=0=S(p,n)\,.$$

On peut donc généraliser, de manière cohŕente, la formule obtenue à la question précédente :

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ S(p,n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p\,.}$$

**II.C)** Avec les questions précédentes :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n=S(n,n)=n!\quad\text{et}\quad\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n+1}=S(n+1,n)=\frac{n\times(n+1)!}{2}\cdot}$$

# III Etude d'une famille de polynômes

## III.A - Généralités

**III.A.1)** Pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, $\deg(H_k)=k$.

Donc la famille $(H_0,H_1,\dots H_n)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés, donc elle est libre.

Elle est constituée de $n+1=\dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc :

$$\boxed{(H_0,H_1,\dots H_n)\text{ est une base de }\mathbb{R}_n[X]\,.}$$

**III.A.2)** $\delta(H_0)=1-1=0$.

Et pour tout $k\in[\![1\,;n]\!]$,

$$\begin{aligned}\delta(H_k)(X)=H_k(X+1)-H_k(X)&=\frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j)-\prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\right)\\&=\frac{1}{k!}\left((X+1)\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)-(X-k+1)\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right)=\frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right)((X+1)-(X-k+1))\\&=\frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right)\times k=H_{k-1}\,.\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\delta(H_0)=0\text{ et pour tout }k\in[\![1\,;n]\!],\ \delta(H_k)=H_{k-1}\,.}$$

**III.A.3)** Comme $\delta = \tau - \mathrm{id}$, on a alors $\tau(H_0) = \delta(H_0) + H_0 = H_0$ et $\tau(H_k) = \delta(H_k) + H_k = H_k + H_{k-1}$.
Ainsi $M'$ est exactement la matrice de $\tau$ dans la base $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
Par conséquent,

$$\boxed{M \text{ et } M' \text{ sont semblables (matrice d'un même endomorphisme dans deux bases différentes).}}$$

**III.A.4)** Pour tout $k, \ell \in [\![0\,;n]\!]$, on a (*par récurrence pour* $\ell \geqslant k$) :

$$\delta^k(H_\ell) = \delta^{k-1}(H_{\ell-1}) = \begin{cases} H_{\ell-k} & \text{si} \quad \ell \geqslant k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $h \neq 0$, $H_h(0) = 0$ et $H_0(0) = 1$. Par conséquent :

$$\boxed{\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \ell = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

**III.A.5)** Puisque $(H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell H_\ell$. Par linéarité :

$$\delta^k P(0) = \sum_{\ell}^{n} a_\ell \delta^k(H_\ell)(0) = a_k\,,$$

donc :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \delta^k(P)(0) H_k\,.}$$

## III.B - Étude d'un exemple

**III.B.1)** Notons $T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$.
Il s'agit de calculer $\delta^k(T)(0)$, pour $k$ de $0$ à $3$. Or

$$T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7\,,\ \delta(T)(X) = 3X^2 + 7X + 8\,,\ \delta^2(T)(X) = 6X + 10\,,\ \delta^3(T)(X) = 6$$

On a donc :

$$\boxed{T = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0\,.}$$

**III.B.2)** Puisque $\delta^2(H_k) = H_{k-2}$, alors par linéarité :

$$\boxed{\text{si } P = 6H_5 + 10H_4 + 8H_3 + 7H_2, \text{ on a } \delta^2(P) = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0\,.}$$

**III.B.3)** Soit $(p_n)$ une solution particulière. Toute autre solution $(u_n)$ vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (u-p)_{k+2} - 2(u-p)_{k+1} + (u-p)_k = (u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k) - (p_{k+2} - 2p_{k+1} + p_k)$$
$$= (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) - (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) = 0$$

Donc la suite $(u-p)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre $2$.
Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$, donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = p_n + (A + Bn)1^n$.
Reste à trouver cette solution paticulière. On a vu que $\delta^2(P)(X) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$.
Avec $P$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\delta^2(P)(k) = k^3 + 2k^2 + 5k + 7$ et $p_k = P(k)$, on a une solution particulière.
Enfin, comme pour $k \geqslant h$, $H_h(k) = \frac{1}{h!}k(k-1)\dots(k-(h-1) = \frac{1}{h!} \times \frac{k!}{(k-h)!} = \binom{k}{h}$, et pour $k < h$, $H_k(h) = 0$ ; on a

$$\boxed{\text{il existe } A, B \in \mathbb{R} \text{ tels que pour tout } k \in \mathbb{N},\ u_k = A + Bk + 6\tbinom{k}{5} + 10\tbinom{k}{4} + 8\tbinom{k}{3} + 7\tbinom{k}{2}\,,}$$

avec la convention habituelle : $\binom{k}{h} = 0$ si $h > k$.

## III.C - Polynômes à valeurs entières

**III.C.1)** Le calcul a été fait plus haut pour les nombres entiers naturels.
Si $k<0$, en notant $p=-k$, on a :

$$H_n(k)=\frac{1}{n!}k(k-1)\dots(k-(n-1))=\frac{1}{n!}(-p)(-(p+1))\dots(-(p+n-1))=\frac{1}{n!}(-1)^n\frac{(p+n-1)!}{(p-1)!}=(-1)^n\binom{p+n-1}{n}$$

Finalement

$$\boxed{H_n(k)=\begin{cases}\binom{k}{n} & \text{si} \quad k\geqslant n\\ 0 & \text{si} \quad k\in[0,n-1]\\ (-1)^n\binom{n-1-k}{n} & \text{si} \quad k<0\end{cases}}$$

**III.C.2)** Tous les coefficients binomiaux sont entiers (puisqu'il s'agit d'un cardinal d'un ensemble), donc pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $H_n(k)\in\mathbb{Z}$.

$$\boxed{H_n(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}}$$

**III.C.3)** Pour tout $k\in\mathbb{Z}$,

$$\delta(P)(k)=P(k+1)-P(k)$$

Par soustraction de nombres entiers, il s'agit d'un nombre entier. Donc :

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est à valeurs entières sur les entiers, alors il en est de même pour } \delta(P).}$$

**III.C.4)** Si $P$ est à valeurs entières sur les entiers, alors par récurrence (sur $h\in\mathbb{N}$), pour tout entier $k\in\mathbb{Z}$, $\delta^h(P)(k)\in\mathbb{Z}$ .
En particulier $\delta^h(P)(0)\in\mathbb{Z}$, et les coordonnées de $P$ dans la base $(H_k)$ sont des entiers.

Réciproquement, si les coordonnées de $P$ dans la base $(H_k)$ sont des entiers, alors $P=\sum_{i=0}^{d}a_iH_i$, puis

$P(k)=\sum_{i=0}^{d}a_iH_i(k)\in\mathbb{Z}$ (combinaison linéaire d'entiers).
Conclusion :

$$\boxed{P \text{ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans } (H_k) \text{ sont entières.}}$$

**III.C.5)** Supposons que $P$, de degré $d$, est à valeurs entières sur les entiers,

Alors d'après les questions précédentes, il existe $a_0,a_1\dots a_d\in\mathbb{Z}$ tels que $P=\sum_{i=0}^{d}a_iH_i$.

Et donc

$$d!P=\sum_{i=0}^{d}a_i\times d!H_i=\sum_{i=0}^{d}\left(a_i\times d(d-1)\dots(i+1)\times\prod_{j=0}^{i-1}(X-j)\right)$$

$$\boxed{d!P \text{ est bien d'un polynôme à coefficients entiers.}}$$

Comme le montre le polynôme $P=\frac{1}{2}X^2$, de degré $2$, on a $2!P$ à coefficients entiers, mais $P(1)=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{La réciproque est donc fausse.}}$$

# IV Généralisation de l'opérateur de différence et application

## IV.A -

**IV.A.1)** $x\mapsto x+1$ est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Par composition, $x\mapsto f(x+1)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Puis par addition

$$\boxed{\delta \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ de } \mathbb{R}_+^*}$$

Puis pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$\delta(f')(x)=f'(x+1)-f'(x) \text{ et } (\delta(f))'(x)=f'(x+1)-f'(x)$$

Donc

$$\boxed{\delta(f')=(\delta(f))'}$$

**IV.A.2)** Même démonstration qu'en $I.B.4)$ :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (\delta^n(f))(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k)\,.}$$

**IV.A.3)** Soit $x > 0$.

Appliquons le théorème des accroissements finis à $f$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x\,;x+1]$ :

$$\exists c \in \,]x\,;x+1[\ \text{ tel que } \ \delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) = f'(c) \times (x+1-x) = f'(c).$$

En posant $y_1 = c - x$ :

$$\boxed{\text{pour tout } x > 0, \text{ il existe } y_1 \in \,]0\,;1[\ \text{ tel que } \delta(f)(x) = f(x+y_1)\,.}$$

**IV.A.4)** Nous allons procéder par récurrence. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$\mathcal{P}_n$ :« $\forall x > 0, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*), \exists y_n \in \,]0\,;n[$ tel que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n)$ »

- La réponse de $IV.A.3)$ montre que $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
  Soit $x > 0$ ; il existe $y_n \in \,]0\,;n[$ ($\mathcal{P}_n$ à $\delta f$) tel que :

  $$\delta^{n+1}(f)(x) = \delta^n(\delta f)(x) = (\delta f)^{(n)}(x+y_n).$$

  Par commutation de l'opération différence et dérivation :

  $$\delta^{n+1}(f)(x) = (\delta f)^{(n)}(x+y_n) = \delta(f^{(n)})(x+y_n) = f^{(n)}(x+y_n+1) - f^{(n)}(x+y_n).$$

  On applique l'égalité des accroissements finis à $f^{(n)}$ : il existe $c \in \,]x+y_n\,;x+y_n+1[$ tel que :

  $$f^{(n)}(x+y_n+1) - f^{(n)}(x+y_n) = (f^{(n)})'(c) \times \big((x+y_n+1) - (x+y_n)\big) = f^{(n+1)}(c)$$

  Enfin, d'après $IV.A.2)$ :

  $$\delta^{n+1}(f)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f(x+j) = f^{(n+1)}(c).$$

  En prenant $y_{n+1} = c - x$, alors $y_{n+1} \geqslant x + y_n - x \geqslant y_n \geqslant 0$ et $y_{n+1} \leqslant x + y_n + 1 - x \leqslant y_n + 1 \leqslant n+1$.
  Ainsi, on a donc $\mathcal{P}_{n+1}$ qui est vérifiée.

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x > 0, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*), \forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in \,]0\,;n[\ \text{ tel que } \ \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n).}$$

## IV.B -

**IV.B.1)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Il existe $p_1, \dots p_i$, $i$ nombres premiers et $a_1, a_2 \dots a_i \in \mathbb{N}$ tel que $k = \displaystyle\prod_{j=1}^{i} p_j^{a_j}$.

On a alors :

$$k^\alpha = \prod_{j=1}^{i} (p_j^{a_j})^\alpha = \prod_{j=1}^{i} (p_j^\alpha)^{a_j}$$

Il s'agit de produit de nombres entiers naturels non nuls, donc

$$\boxed{k^\alpha \text{ est un nombre entier naturel.}}$$

**IV.B.2)** Si $\alpha < 0$, alors

$$2^\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} < 1$$

Or on a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ , $k^\alpha \in \mathbb{N}^*$, donc $k^\alpha \geqslant 1$. On a une contradiction donc :

$$\boxed{\alpha \in \mathbb{R}_+}$$

**IV.B.3)** Si $\alpha$ est un entier naturel, alors $f_\alpha^{(\alpha)} = \alpha!$ et donc $f_\alpha^{(\alpha+1)} = 0$ ; la propriété demandée est évidemment vérifiée.

Réciproquement, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 > 0$ tels que $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$. On sait que pour tout réel $x$,

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Donc si $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$, alors comme $x_0 > 0$, on a nécessairement : $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) = 0$, et donc il existe $k \in [\![0\,;n-1]\!]$ tel que $\alpha - k = 0$ donc $\alpha = k \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\boxed{\alpha \in \mathbb{N} \text{ ssi il existe } n \in \mathbb{N} \text{ et } x_0 > 0 \text{ tels que } f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0.}$$

## IV.C -

**IV.C.1)** D'après *IV.B.*1), pour tout $k$ entier, $k^\alpha \in \mathbb{N}$, donc pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$, $f_\alpha(x+j) \in \mathbb{N}$ puisque $x$ entier.

Puis par stabilité par multiplication et additions d'entiers :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}\binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \in \mathbb{N}.}$$

**IV.C.2)** On applique directement la relation (*IV.*1.) :

$$\exists y_n \in \,]0\,;n[ \text{ tel que } \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}\binom{n}{j} f_\alpha(x+j) = f_\alpha^{(n)}(x+y_n) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor)}{(x+y_n)^{\lfloor\alpha\rfloor+1-\alpha}}.$$

Donc comme $y_n \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}\binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \leqslant \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor)}{x^{\lfloor\alpha\rfloor+1-\alpha}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

**IV.C.3)** En prenant dans la définition de la limite $\varepsilon = \frac{1}{2}$, le résultat précédent implique :

$$\text{il existe } A > 0 \text{ tel que pour tout } x \geqslant A \text{ et entier : } \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}\binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \in \left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[.$$

Or cette somme est entière, donc elle est nécessairement nulle.

Ainsi, pour tout $x \geqslant A$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}\binom{n}{j} f_\alpha(x+j) = 0 = f^{(n)}(x+y_n)$.

Donc, une dérivée de $f_\alpha$ s'annule en au moins un réel strictement positif. D'après *IV.B.*3),

$$\boxed{\alpha \text{ est donc un entier naturel.}}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆