DM N°1 (pour le 08/09/2017)

Notations et objectifs :

Soit E un espace vectoriel réel et A une partie non vide de E.
Si a est un élément de A, on dit que a est un point extrémal de A si :

$$\forall\,(x,y)\in A^2,\ \left(\frac{x+y}{2}=a\right)\Longrightarrow (x=y=a)\,.$$

Les parties 0 et I permettent de se familiariser avec la notion de point extrémal.

La partie II prouve que les points d'une partie donnant le diamètre de cette partie sont extrémaux.

Enfin la partie III étudie des propriétés des matrices de permutation, en particulier de l'isobarycentre de ces matrices. On obtient finalement une preuve du fait que les points extrémaux de l'ensemble des matrices bistochastiques sont les matrices de permutation.

Partie 0 : Étude d'un premier exemple dans $\mathbb{R}$.

1. On prend ici $E=\mathbb{R}$ et $A=\left]0\,;1\right[$; montrer qu'aucun point de A n'est extrémal.

2. On considère maintenant $E=\mathbb{R}$ et $A=[0\,;1]$; montrer que les points extrémaux de A sont 0 et 1.

Partie I : Étude d'un second exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans cette partie, on note E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ pour $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, A_2 le sous-ensemble de E formé des matrices $M_\alpha=\begin{pmatrix}\alpha & 1-\alpha\\ 1-\alpha & \alpha\end{pmatrix}$ pour $\alpha\in[0\,;1]$ et J la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Par ailleurs, I_2 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Propriétés des éléments de A_2.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base.

b) Déterminer les éléments M_α de A_2 qui sont inversibles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour ceux-ci, donner l'expression de $(M_\alpha)^{-1}$ et préciser pour quelles valeurs de $\alpha\in[0\,;1]$ $(M_\alpha)^{-1}$ appartient encore à A_2.

2. Points extrémaux de A_2.

a) Montrer que I_2 et J sont des points extrémaux de A_2.

b) Soit α dans $\left]0\,;\frac12\right]$; vérifier que : $M_\alpha=\frac12\left(M_{2\alpha}+J\right)$; en déduire que M_α n'est pas extrémal.

c) Par une méthode similaire, montrer que si α est dans $\left[\frac12\,;1\right[$, M_α n'est pas extrémal.

3. Réduction simultanée des matrices de A_2.

a) **[5/2]** Déterminer les valeurs propres et espaces propres de la matrice J.

b) **[5/2]** Montrer qu'il existe une matrice inversible P dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $\alpha\in[0\,;1]$, $P^{-1}M_\alpha P$ est une matrice diagonale D_α ; on précisera P et D_α.

c) On note u_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par la matrice M_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les réels α de $[0\,;1]$ tels que u_α soit un projecteur de $\mathbb{R}^2$. On précisera l'image et le noyau du ou des projecteurs ainsi trouvés.

Partie II : Points extrémaux et diamètre d'une partie bornée d'un espace euclidien.

Dans cette partie, on suppose que E est un espace euclidien de dimension finie non nulle, muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$. On note $\| \ \|$ la norme euclidienne associée.

On considère A une partie non vide de E telle qu'il existe un réel R positif tel que, pour tout vecteur v de A, on ait : $\|v\| \leqslant R$.

On note alors $\delta(A) = \sup \left\{ \|v - w\| \mid (v, w) \in A^2 \right\}$; $\delta(A)$ est appelé diamètre de A.

1. Justifier l'existence de $\delta(A)$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que la partie A vérifie la propriété (H) suivante :

$$(H) \text{ : il existe } (a, b) \text{ dans } A^2 \text{ tel que } \delta(A) = \|b - a\|.$$

On se propose de démontrer que a est un point extrémal de A.

2. **[5/2]** Montrer que la condition (H) est vérifiée si l'on suppose que A est une partie fermée de E.

3. On considère (c, d) dans A^2 tel que $\dfrac{c+d}{2} = a$.

a) Vérifier que : $\|a - b\| \leqslant \frac{1}{2}(\|c - b\| + \|d - b\|) \leqslant \|a - b\|$.

En déduire que : $\|c - b\| = \|d - b\| = \delta(A)$.

b) Montrer que : $\|c - a\|^2 = -2\langle c - a \,|\, a - b \rangle$ et que : $\|d - a\|^2 = -2\langle d - a \,|\, a - b \rangle$.

c) En déduire que a, c et d sont égaux et conclure.

Partie III : Étude de l'ensemble des matrices bistochastiques et de ses points extrémaux.

Dans tout la suite du problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ m_{i,j} \geqslant 0,\ \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1 \text{ et } \forall j \in [\![1\,;n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1$$

est noté A_n ; il s'agit de l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note F_n l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0 \text{ et } \forall j \in [\![1\,;n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 0.$$

Si $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\operatorname{tr}(M)$ sa trace, c'est-à-dire le réel $\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle. Enfin, $\mathscr{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Premières propriétés de A_n.

a) Soient $M_1, \dots, M_p$ dans A_n et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels positifs ou nuls tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.

Montrer que la matrice $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$ appartient à A_n.

b) On note $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (toutes les coordonnées de X_0 sont égales à 1).

Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall\,(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ m_{i,j} \geqslant 0$.

Montrer que $M \in A_n$ si et seulement si $MX_0 = {}^tMX_0 = X_0$.

c) Soit $(M, M') \in A_n^2$; montrer que : $MM' \in A_n$.

2. Endomorphismes et matrices de permutation.

On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1\,;n]\!]$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $[\![1\,;n]\!]$ sur lui-même. Le cardinal de S_n est $n!$.

Soit $\sigma \in S_n$; on note f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\text{pour tout } j \in [\![1\,;n]\!],\ f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}\,.$$

On note M_σ la matrice de f_σ dans la base $\mathscr{B}_c$, et on dit que M_σ est la matrice de permutation associée à σ.

a) Si σ est l'identité de $[\![1\,;n]\!]$ (pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\sigma(i) = i$), que sont f_σ et M_σ ?

b) Justifier que les matrices M_σ sont exactement les matrices présentant sur chaque ligne et chaque colonne une fois la valeur 1 et $n-1$ fois la valeur 0.

c) Si σ est une permutation de S_n, montrer que : $M_\sigma \in A_n$. Déterminer $\tau \in S_n$ telle que ${}^tM_\sigma = M_\tau$.

d) Soit (σ, σ') de $(S_n)^2$, montrer que $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma\circ\sigma'}$; en déduire que M_σ est inversible et déterminer $(M_\sigma)^{-1}$.

e) **[5/2]** Justifier que les matrices M_σ sont des matrices orthogonales.

3. Soit $\sigma \in S_n$; montrer que M_σ est un point extrémal de A_n.

4. Caractériser les matrices de A_n qui sont inversibles et dont l'inverse appartient aussi à A_n.

5. Étude d'un projecteur

On note $p = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma$ et $P = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} M_\sigma$.

a) Soit τ fixé dans S_n ; montrer que l'application $\varphi_\tau : \sigma \mapsto \tau\circ\sigma$ est une bijection de S_n dans lui-même. Montrer alors que : $f_\tau \circ p = p$.

b) En déduire que p est un projecteur de $\mathbb{R}^n$.

c) Montrer que : $\operatorname{Im} p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\sigma \in S_n,\ f_\sigma(x) = x\}$.

d) Montrer alors que : $\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}(x_0)$ où $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$.

e) Calculer ${}^tP$; en déduire que p est un projecteur orthogonal et déterminer P.

f) Vérifier que $P \in A_n$.

6. Diamètre de A_n.

a) Si $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ et $N = (n_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ sont deux matrices de E, montrer que :

$$\operatorname{tr}\left({}^tMN\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}n_{ij}\,.$$

b) Montrer que l'application $(M,N) \mapsto \operatorname{tr}\left({}^tMN\right)$ est un produit scalaire sur E.

Si (M, N) sont dans E, on notera $\langle M \,|\, N\rangle = \operatorname{tr}({}^tMN)$ et $\|M\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr}({}^tMM)}$.

c) Soit $\sigma \in S_n$, calculer $\|M_\sigma\|_2$.

d) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 2$. Soit (α, β) dans $[0\,;1]^2$ et (M_α, M_β) de A_2^2 : calculer $\|M_\alpha - M_\beta\|_2$. Montrer alors que $\delta(A_2) = 2$.

e) On revient au cas général $n \geqslant 2$. Soit $M \in A_n$; montrer que $\|M\|_2^2 \leqslant n$.

f) Montrer alors que, pour tout (M, N) de A_n^2, $\|M - N\|_2 \leqslant \sqrt{2n}$.

g) Soit σ dans S_n ; construire τ dans S_n tel que $\langle M_\sigma \,|\, M_\tau\rangle = 0$.

h) En déduire le diamètre de A_n et retrouver que les matrices de permutation sont des points extrémaux de A_n.

7. Structure et dimension de F_n.

a) Vérifier que F_n est un sous-espace vectoriel de E.

b) Soit $\Phi : F_n \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ qui à toute matrice $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ de F_n associe la matrice $\Phi(M) = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n-1]\!]^2}$.
Montrer que Φ est un isomorphisme de F_n dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de F_n.

8. On désire montrer que les matrices de permutation sont les seuls points extrémaux de A_n.
On raisonne par récurrence sur $n \geqslant 2$, et on note (P_n) la proposition :

(P_n) Si M est un point extrémal de A_n, M est une matrice de permutation.

a) Vérifier, à l'aide de la partie I, que la proposition (P_2) est réalisée.

On considère n un entier naturel supérieur ou égal à 3 tel que (P_{n-1}) soit réalisée et on se donne $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \in E$ un point extrémal de A_n.

On suppose d'abord que la matrice M a au moins $2n$ coefficients non nuls : il existe $2n$ couples $(i_k, j_k)_{k\in[\![1;2n]\!]}$ deux à deux distincts tels que m_{i_k,j_k} est non nul.

On pose alors $H = \operatorname{Vect}(E_{i_k,j_k},\ k \in [\![1\,;2n]\!])$ où les matrices $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ sont les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire : $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant $n^2 - 1$ coefficients nuls et un seul valant 1, placé en position (i, j) .

b) Montrer que $H \cap F_n \neq \{0\}$.

c) On prend N dans $H \cap F_n$ avec $N \neq 0$ et, pour t réel, on note $Q_t = M + tN$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout t de $]-\varepsilon\,;\varepsilon[$, Q_t est dans A_n.

d) En considérant t de $]-\varepsilon\,;\varepsilon[$ et les matrices Q_t et Q_{-t}, montrer que l'on aboutit à une contradiction.

On a donc prouvé que la matrice M a au plus $2n - 1$ coefficients non nuls.

e) Montrer alors qu'il existe une colonne de M n'ayant qu'un terme non nul et que ce terme vaut 1.

On note s l'indice d'une telle colonne et r l'indice de la ligne telle que $m_{r,s} = 1$.

f) Justifier que la ligne d'indice r de M a tous ses coefficients nuls sauf $m_{r,s}$.

g) On considère alors la matrice M' obtenue à partir de M en lui enlevant la colonne d'indice s et la ligne d'indice r, montrer que M' est dans A_{n-1} et que M' est un point extrémal de A_{n-1}.

h) En déduire que M' est une matrice de permutation de A_{n-1} et que M est une matrice de permutation de A_n.