CORRIGÉ DM N°1 (problème adapté de ESSEC S 2017)

PARTIE 0

Rappelons déjà que la négation d'une implication

$$P \Longrightarrow Q$$

est :

$$P \text{ et } (\textit{non } Q)\,.$$

Ainsi, dire qu'un point $a \in A$ n'est *pas* extrémal signifie, en prenant la négation de la propriété de l'énoncé :

$$\exists\,(x,y) \in A^2 \text{ tels que } x \neq a,\ y \neq a \text{ et } \frac{x+y}{2} = a\,.$$

1. Soit $a \in \,]0\,;1[$. Puisque $]0\,;1[$ est un intervalle *ouvert*, il existe un voisinage de a inclus dans $]0\,;1[$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[\, \subset \,]0\,;1[$.

En prenant $x = a - \varepsilon$ et $y = a + \varepsilon$, on a bien $\dfrac{x+y}{2} = a$ avec $x \in A$ et $y \in A$, et $x \neq a$ et $y \neq a$.
Cela prouve que a n'est pas un élément extrémal de A.

2. On vient de voir qu'aucun point de $]0\,;1[$ n'est extrémal ; les seuls points extrémaux possibles de $[0\,;1]$ sont donc 0 et 1.

Or ce sont bien des points extrémaux ; en effet :
- si x et y dans $[0\,;1]$ sont tels que $\dfrac{x+y}{2} = 0$ alors $x = y = 0$ (puisque x et y sont positifs) ;
- si x et y dans $[0\,;1]$ sont tels que $\dfrac{x+y}{2} = 1$ alors $x = y = 1$ (puisque $x < 1$ ou $y < 1$ implique $x + y < 2$).

On en conclut que les seuls points extrémaux de $[0\,;1]$ sont 0 et 1.

PARTIE I

1. a) Une matrice M appartient à E si et seulement si elle s'écrit sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_2 + \beta J$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

E est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices I_2 et J : c'est le sous-espace vectoriel engendré par ces deux matrices.
En particulier, c'est bien un sous-espace vectoriel.

De plus la famille $\{I_2, J\}$ est libre (I_2 et J ne sont pas proportionnelles), donc elle forme une base de E.

b)
- M_α inversible $\Longleftrightarrow \det(M_\alpha) \neq 0 \Longleftrightarrow 2\alpha - 1 \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq \dfrac{1}{2}\cdot$
- On sait que, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est de déterminant non nul, alors son inverse est donnée par la formule :

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Donc ici, lorsque $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ on a :

$$M_\alpha^{-1} = \frac{1}{2\alpha - 1} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 1 \\ \alpha - 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

- On a alors :

$$M_\alpha^{-1} \in A_2 \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{2\alpha - 1} \in [0\,;1] \textbf{ et } \frac{\alpha}{2\alpha - 1} + \frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1} = 1\,.$$

La deuxième égalité est trivialement vérifiée. Il reste à chercher les valeurs de $\alpha \in [0\,;1]$ pour lesquelles $\dfrac{\alpha}{2\alpha - 1} \in [0\,;1]$. Or :

– c'est vrai lorsque $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$;

– lorsque $\alpha \in \left]0\,;1\right[$, la condition $\dfrac{\alpha}{2\alpha - 1} > 0$ implique $2\alpha - 1 > 0$ soit $\alpha > \dfrac{1}{2}$; mézalor la condition $\dfrac{\alpha}{2\alpha - 1} < 1$ équivaut à $\alpha < 2\alpha - 1$ soit $\alpha > 1$, c'est impossible.

En conclusion, les seuls matrices inversibles de A_2 dont l'inverse appartient encore à A_2 sont les matrices I_2 et J (cela est un cas particulier du résultat de la question **III.4**).

2. a) – Soient M_α et M_β, avec $\alpha, \beta \in [0\,;1]$, deux éléments de A_2 telles que $\dfrac{M_\alpha + M_\beta}{2} = I_2$. On obtient alors $\dfrac{\alpha + \beta}{2} = 1$, d'où $\alpha = \beta = 1$ d'après **0.2**, soit $M_\alpha = M_\beta = I_2$.
Cela signifie que la matrice I_2 est un élément extrémal de A_2.

– On démontre de façon analogue que J est aussi un élément extrémal de A_2.

b) Soit α dans $\left]0\,;\frac{1}{2}\right]$; l'égalité : $M_\alpha = \frac{1}{2}\,(M_{2\alpha} + J)$ se vérifie immédiatement.
Or les matrices $M_{2\alpha}$ et J appartiennent à A_2 (puisque $\alpha \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, donc $2\alpha \in [0\,;1]$) et sont distinctes (puisque $\alpha \neq 0$). L'égalité précédente implique donc que M_α n'est pas un élément extrémal de A_2.

c) Lorsque $\alpha \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right[$, la relation $M_\alpha = \dfrac{1}{2}\big(M_{2\alpha-1} + I_2\big)$ permet de montrer de la même façon que M_α n'est pas extrémal

Conclusion : les points extrémaux de A_2 sont I_2 et J ; cela est un cas particulier de **III.8**.

3. a) Nul besoin de calcul compliqué ici. On vérifie aisément que :

$$J\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Cela montre que 1 et -1 sont valeurs propres de J. Il ne peut y en avoir plus, donc $\mathrm{Sp}(J) = \{-1, 1\}$.
Et les calculs ci-dessus montrent que les sous-espaces propres associés sont les droites de base $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ pour la valeur propre 1 et de base $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ pour la valeur propre -1.

b) D'après les calculs ci-dessus et les théorèmes du cours (plusieurs sont applicables, je ne détaille pas), la matrice J est diagonalisable et :

$$J = PDP^{-1} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \mathrm{diag}(1, -1)\,.$$

On a donc, pour tout $\alpha \in [0\,;1]$:

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \alpha I_2 + (1-\alpha)J = \alpha I_2 + (1-\alpha)PDP^{-1} \\ &= P\big(\alpha I_2 + (1-\alpha)D\big)P^{-1}\,, \end{aligned}$$

donc $P^{-1}M_\alpha P = D_\alpha$ avec $D_\alpha = \alpha I_2 + (1-\alpha)D = \mathrm{diag}(1, 2\alpha - 1)$.

c)
- u_α est un projecteur si et seulement si $u_\alpha^2 = u_\alpha$, ce qui équivaut à $M_\alpha^2 = M_\alpha$, soit après un petit calcul, à $\alpha \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

  Rem : pour les 5/2, il était plus rapide de remarquer que, en dimension 2, un endomorphisme diagonalisable est un projecteur si et seulement si ses valeurs propres sont $(0,0)$ ou $(1,1)$ ou $(0,1)$.
- Lorsque $\alpha = 1$, $u_\alpha = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

  Lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$, $u_{\frac{1}{2}}$ est, d'après les calculs précédents, la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\,\{(1,1)\}$.

PARTIE II

1. A étant non vide, l'ensemble de nombres réels :

$$\big\{\|v - w\| \;\big|\; (v,w) \in A^2\big\}$$

est non vide. De plus, il est majoré puisque, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\forall\,(v,w) \in A^2,\ \|v - w\| \leqslant \|v\| + \|w\| \leqslant 2R\,.$$

Il possède donc une borne supérieure $\delta(A)$.

2. On suppose ici A fermée et bornée.

L'application $d:\left\{\begin{array}{ccc} A^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v,w) & \longmapsto & \|v-w\| \end{array}\right.$ est continue puisque :

– les applications $(v,w)\mapsto v$ et $(v,w)\mapsto w$ le sont (cours), donc $(v,w)\mapsto v-w$ l'est ;

– la norme est une application continue (car lipschitzienne).

d étant continue sur A^2 partie fermée et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie, elle est bornée et atteint ses bornes, d'où l'existence de $\delta(A)$ et de $(a,b)\in A^2$ tels que $\delta(A)=d(a,b)=\|a-b\|$.

3. a) • D'après l'inégalité triangulaire :

$$\|a-b\|=\left\|\frac{c+d}{2}-b\right\|=\frac{1}{2}\|(c-b)+(d-b)\|\leqslant\frac{1}{2}\left(\|c-b\|+\|d-b\|\right).$$

De plus, b, c et d sont dans A donc par définition de la borne supérieure :

$$\|c-b\|\leqslant\delta(A)\quad\text{et}\quad\|d-b\|\leqslant\delta(A),$$

et puisque $\delta(A)=\|a-b\|$ on en déduit la seconde partie de l'inégalité.

• On a donc finalement l'égalité :

$$\|a-b\|=\frac{1}{2}\left(\|c-b\|+\|d-b\|\right),$$

et puisque

$$\|c-b\|\leqslant\|a-b\|\quad\text{et}\quad\|d-b\|\leqslant\|a-b\|,$$

il y a égalité entre ces trois normes.

b) Par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\|c-b\|^2&=\|(c-a)+(a-b)\|^2\\&=\|c-a\|^2+\|a-b\|^2+2\left\langle c-a\,|\,a-b\right\rangle,\end{aligned}$$

et la relation $\|a-b\|=\|c-b\|$ implique l'égalité :

$$\|c-a\|^2=-2\left\langle c-a\,|\,a-b\right\rangle\qquad(1)$$

On démontre de la même manière la relation :

$$\|d-a\|^2=-2\left\langle d-a\,|\,a-b\right\rangle\qquad(2)$$

c) En additionnant (1) et (2) on obtient par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\|c-a\|^2+\|d-a\|^2&=-2\big(\left\langle c-a\,|\,a-b\right\rangle+\left\langle d-a\,|\,a-b\right\rangle\big)\\&=-2\left\langle (c-a)+(d-a)\,|\,a-b\right\rangle=\left\langle c+d-2a\,|\,a-b\right\rangle=\left\langle 0\,|\,a-b\right\rangle=0,\end{aligned}$$

d'où $\|c-a\|^2=\|d-a\|^2=0$.

Ainsi, $a=c=d$. On a donc montré que :

$$\forall\,(c,d)\in A^2,\ \frac{c+d}{2}=a\Longrightarrow a=c=d,$$

ce qui signifie que a est un point extrémal de A (il en est de même pour b bien sûr).

PARTIE III

1. a) Pour tout $i\in[\![1\,;p]\!]$ notons $(M_i)_{k\ell}$ le terme d'indice (k,ℓ) de la matrice M_i, et $M=(m_{k\ell})$ la matrice $M=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_iM_i$.

– Puisque les λ_i sont positifs et que les matrices M_i sont à coefficients positifs, on a pour tout $(k,\ell)\in[\![1\,;n]\!]^2$:

$$m_{k\ell}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(M_i)_{k\ell}\geqslant 0.$$

– Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$ on a :

$$\sum_{\ell=1}^{n} m_{k\ell} = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (M_i)_{k\ell} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{n} (M_i)_{k\ell}\right)}_{=1 \text{ car } M_i \in A_n} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1\,,$$

et on démontre de la même façon que pour tout $\ell \in [\![1\,;n]\!]$ on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{k\ell} = 1$.

On en déduit que la matrice M appartient à A_n.

b) D'après la formule du produit matriciel :

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ (MX_0)_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(X_0)_j = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}$$

et

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ ({}^tMX_0)_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(X_0)_j = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}\,.$$

Puisque les m_{ij} sont déjà supposés positifs, il en résulte que

$$M \in A_n \iff \forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ (MX_0)_i = ({}^tMX_0)_i = 1 \iff MX_0 = {}^tMX_0 = X_0.$$

c) Avec des notations évidentes, on a, par la formule du produit matriciel :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ (MM')_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}m'_{kj}\,.$$

– Puisque les coefficients de M et de M' sont positifs, il en résulte que ceux de MM' le sont aussi ;

– Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on a :

$$\sum_{j=1}^{n}(MM')_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ik}m'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} m'_{kj}\right)}_{=1 \text{ car } M' \in A_n} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = 1 \text{ car } M \in A_n\,,$$

et l'on démontre de la même manière que pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$ on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(MM')_{ij}$.

Cela prouve que la matrice MM' appartient à A_n.

2. a) Si σ est la permutation identique, alors $f_\sigma(e_i) = e_i$ pour tout i donc $f_\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et $M_\sigma = I_n$ (on rappelle qu'une application liénaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base).

b) – Si M_σ est une matrice de permutation, alors sur chaque colonne de n°j, il y a un « 1 » à la ligne de n°$\sigma(j)$ et des « 0 » ailleurs. De plus puisque $\sigma(j) \neq \sigma(j')$ lorsque $j \neq j'$, les « 1 » ne peuvent se trouver sur la même ligne.

– Réciproquement, si M est une matrice qui possède sur chaque ligne et colonne une fois la valeur 1 et $n-1$ fois la valeur 0, soit, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $\sigma(j)$ l'indice de la ligne où il y a le « 1 » dans la colonne j. Alors σ est une application de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;n]\!]$ qui est injective (car les « 1 » ne peuvent se trouver sur la même ligne), donc bijective. C'est donc une permutation et $M = M_\sigma$ est une matrice de permutation.

c) – Il est clair que si les coefficients de M_σ sont positifs, et que la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne est égal à 1.
Ainsi, $M_\sigma \in A_n$.

– Par définition, pour $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, on a $(M_\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

Donc $({}^tM_\sigma)_{ij} = (M_\sigma)_{ji} \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma^{-1}(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, ce qui montre que ${}^tM_\sigma = M_{\sigma^{-1}}$.

d) Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, on a :

$$(f_\sigma \circ f_{\sigma'})(e_j) = f_\sigma(e_{\sigma'(j)}) = e_{\sigma\circ\sigma'(j)} = f_{\sigma\circ\sigma'}(e_j)\,,$$

et puisque deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales, on en déduit $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma\circ\sigma'}$.

e) On a vu que ${}^tM_\sigma = M_{\sigma^{-1}}$ donc ${}^tM_\sigma M_\sigma = I_n$: M_σ est une matrice orthogonale.

3. Supposons qu'il existe deux matrices bistochastiques $A,\ B \in A_n$ telles que $M_\sigma = \dfrac{1}{2}(A+B)$. Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a :

- si $i = \sigma(j)$, $1 = \dfrac{1}{2}(a_{ij} + b_{ij})$ donc d'après la partie **0.**, puisque a_{ij} et b_{ij} appartiennent à $[0\,;1]$ (c'est une conséquence immédiate de la définition d'une matrice bistochastique), on en déduit $a_{ij} = b_{ij} = 1 = (M_\sigma)_{ij}$;
- si $i \neq \sigma(j)$, on démontre de même que $a_{ij} = b_{ij} = 0 = (M_\sigma)_{ij}$.

On a donc $A = B = M_\sigma$, c'est-à-dire que M_{σ} est un élément extrémal de A_n.

4. • Soit A une matrice bistochastique dont l'inverse est aussi bistochastique : on a donc $A,\ B \in A_n$ telles que $AB = I_n$ soit, par la formule du produit matriciel : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \delta_{ij}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$.

Soient $i,j \in [\![1\,;n]\!]$, $i \neq j$. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0$, mais c'est une somme de termes positifs, donc ils sont tous nuls. Ainsi : $\forall\,(i,j,k) \in [\![1\,;n]\!]^3,\ i \neq j \Longrightarrow a_{ik}b_{kj} = 0$.

Il existe un indice i_0 tel que $a_{i_0,1} \neq 0$. Alors pour tout $j \neq i_0$, on a $b_{1,j} = 0$. Par suite, $b_{1,i_0} = 1$ (car la somme des éléments de la 1ère ligne de B est égale à 1) ; donc pour $k \neq 1$, $b_{k,i_0} = 0$ (car la somme des éléments de la i_0-ième colonne de B est égale à 1) ; et puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i_0,k}b_{k,i_0} = 1$, on a $a_{i_0,1} = 1$ d'où $a_{i,1} = 0$ pour $i \neq i_0$.

On fait pareil avec les autres colonnes. Finalement,chaque colonne de A contient une fois 1 et le reste du temps 0. Ainsi, A est une matrice de permutation.

• Réciproquement, si A est une matrice de permutation M_σ, elle est inversible et son inverse appartient à A_n puisque $A^{-1} = M_{\sigma^{-1}}$ d'après une question précédente.

5. **a)** • Déjà, l'application φ_τ est bien une application de S_n dans S_n, puisque la composée de deux permutations de $[\![1\,;n]\!]$ est encore une permutation de $[\![1\,;n]\!]$.

De plus :

$$\forall\,(\sigma,\sigma') \in S_n^2,\ \sigma' = \varphi_\tau(\sigma) \Longleftrightarrow \sigma' = \tau\circ\sigma \Longleftrightarrow \sigma = \tau^{-1}\circ\sigma'\,,$$

donc tout élément σ' de S_n possède un et un seul antécédent dans S_n : φ_τ est bijective de S_n sur S_n.

• On aura donc :

$$f_\tau \circ p = f_\tau \circ \left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma\right) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_\tau\circ f_\sigma = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_{\tau\circ\sigma} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma'\in S_n} f_{\sigma'} = p\,.$$

b) Puis :

$$p\circ p = \left(\frac{1}{n!}\sum_{\tau\in S_n} f_\tau\right)\circ p = \frac{1}{n!}\sum_{\tau\in S_n} f_\tau\circ p = \frac{1}{n!}\sum_{\tau\in S_n} p = p\,,$$

puisque $\mathrm{card}(S_n) = n!$. Donc p est un projecteur.

c) On procède par double inclusion, et on utilise le fait que, pour un projecteur, l'image est égal au sous-espace vectoriel des vecteurs invariants (cours).

– Montrons que $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\sigma \in S_n,\ f_\sigma\,(x) = x\} \subset \operatorname{Im} p$.
Soit donc x tel que pour toute permutation σ on ait $f_\sigma(x) = x$. Alors

$$p(x) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma(x) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} x = \frac{1}{n!}(n!x) = x \quad (\text{car } \mathrm{card}(S_n) = n!)\,,$$

donc $x \in \operatorname{Im} p$.

– Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Im} p$. Alors $p(x) = x$ donc pour toute permutation σ :

$$x = p(x) = (f_\sigma\circ p)(x) = f_\sigma[p(x)] = f_\sigma(x)\,,$$

ce qui prouve l'autre inclusion.

d) On procède là encore par double inclusion.

– Pour toute permutation σ de $[\![1\,;n]\!]$ on a :

$$f_\sigma(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_\sigma(e_i) = \sum_{i=1}^{n} e_{\sigma(i)} = \sum_{j=1}^{n} e_j = x_0\,,$$

puisque l'application $i \mapsto \sigma(i)$ est une bijection de $[\![1\,;n]\!]$ sur lui-même.
On a donc $x_0 \in \operatorname{Im} p$ d'après la question précédente, donc $\operatorname{Vect}(x_0) \subset \operatorname{Im} p$.

– Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \operatorname{Im} p$. On a alors $f_\sigma(x) = x$ pour toute permutation σ de $[\![1\,;n]\!]$ d'après la question précédente, c'est-à-dire :

$$\forall\,\sigma \in S_n,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = f_\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_\sigma(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_{\sigma(i)} = \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma^{-1}(j)} e_j \quad \text{en posant } j = \sigma(i).$$

Puisque les e_i forment une base, on en déduit $x_i = x_{\sigma^{-1}(i)}$ pour tout i, et puisque cela est vrai pour toutes les permutations σ, on en déduit que toutes les coordonnées de x sont égales, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Vect}(x_0)$, ce qui prouve l'inclusion cherchée.

e) La transposition étant linéaire, on a :

$$^tP = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} {}^tM_\sigma = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} M_{\sigma^{-1}} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma' \in S_n} M_{\sigma'} = P\,,$$

puisque lorsque σ décrit S_n, il en est de même de σ^{-1}.

La matrice P est donc symétrique ; puisqu'il s'agit de la matrice de p dans une base orthonormale, on en déduit que l'endomorphisme p est un projecteur et aussi un endomorphisme symétrique, c'est donc un projecteur orthogonal d'après le cours de PSI.

f) $P = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma M_\sigma$ avec $\lambda_\sigma = \dfrac{1}{n!}$ pour tout σ. Puisque $\sum_{\sigma} \lambda_\sigma = 1$ et que les matrices M_σ sont dans A_n, on en déduit que $P \in A_n$ d'après la question **III.1.a**.

Autre solution :

Puisque P est la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(x_0)$, il n'est pas bien difficile de montrer que $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ (voir le cours sur les façons de trouver la matrice d'une projection...) Dès lors, il est immédiat que $P \in A_n$.

6. a) Question de cours.

b) Question de cours.

c) Puisque $^tM_\sigma M_\sigma = I_n$, on a $\langle M_\sigma \,|\, M_\sigma\rangle = \operatorname{tr}(I_n) = n$ donc $\|M_\sigma\| = \sqrt{n}$.

d) $M_\alpha - M_\beta = \begin{pmatrix} \alpha-\beta & \beta-\alpha \\ \beta-\alpha & \alpha-\beta \end{pmatrix}$ donc $\|M_\alpha - M_\beta\|^2 = 4(\alpha-\beta)^2$ puis $\|M_\alpha - M_\beta\| = 2\,|\alpha-\beta|$.

Puisque α et β sont dans $[0\,;1]$, on a $\|M_\alpha - M_\beta\| \leqslant 2$, donc $\delta(A_2) \leqslant 2$, et puisqu'il y a égalité lorsque, par exemple, $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, on a $\delta(A_2) = 2$.

e) Soit $M \in A_n$. Alors

$$\|M\|^2 = \operatorname{tr}(^tMM) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\right)^2$$

puisque pour tout (i,j), on a $m_{ij} \geqslant 0$. Et puisque $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$ pour tout i, on en déduit $\|M\|^2 \leqslant n$.

f) Soient $M, N \in A_n$. Alors :

$$\|M-N\|^2 = \|M\|^2 + \|N\|^2 - 2\,\langle M \,|\, N\rangle = \|M\|^2 + \|N\|^2 - 2\sum_{i,j} m_{ij}n_{ij} \leqslant \|M\|^2 + \|N\|^2$$

puisque les m_{ij} et n_{ij} sont positifs.

D'après la question précédente : $\|M-N\|^2 \leqslant 2n$.

g) Si M_σ et M_τ sont deux matrices de permutation telles que les « 1 » de l'une ne soient jamais à la même position que les « 1 » de l'autre, leur produit scalaire sera égal à 0 puisque chaque produit $m_{ij}n_{ij}$ vaudra 0. Ce n'est pas bien difficile de trouver un tel exemple !

h) D'après **f)**, on a $\delta(A_n) \leqslant \sqrt{2n}$.

D'après **g)**, on peut trouver deux matrices M_σ et M_τ de A_n qui sont orthogonales ; pour ces matrices on aura donc d'après Pythagore :

$$\|M_\sigma - M_\tau\|^2 = \|M_\sigma\|^2 + \|M_\tau\|^2 = 2n \quad \text{d'après } \mathbf{c)}$$

d'où $\|M_\sigma - M_\tau\| = \sqrt{2n}$.
La valeur maximale trouvée auparavant est donc atteinte, c'est-à-dire $\delta(A_n) = \sqrt{2n}$.

On peut alors appliquer les résultats de la partie **II** avec $A = A_n$: si M_σ est une matrice de permutation, on vient de voir qu'il existe une autre matrice de permutation M_τ telle que $\|M_\sigma - M_\tau\| = \delta(A_n)$; M_σ est donc un point extrémal de A_n.

7.

8. À finir...