CORRIGÉ DU DS°4 : E3A MP 2009 – Étude de la vitesse de convergence de certaines séries

Partie I

1. C'est la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$.

2. Il suffit d'intégrer l'égalité précédente sur le segment borné par 0 et x, sur lequel toutes les fonctions concernées sont continues.

3. D'après l'égalité du **2.**, il suffit de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$ a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

Or $\displaystyle\left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \max\left(1, \frac{1}{1+x}\right)\left|\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t\right| = \max\left(1, \frac{1}{1+x}\right)\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|$

donc $\displaystyle\left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n+1}\max\left(1, \frac{1}{1+x}\right)$, qui tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Note pour les 5/2 : On pouvait aussi utiliser le théorème de convergence dominée (c'est clairement ce qu'attendait l'énoncé, mais c'est inutilement compliqué ici !) : pour tout n, soit $f_n : t \longmapsto \dfrac{(-1)^n t^n}{1+t}$. Les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $]0,x[$ (ou $]x,0[$ si $x < 0$), la suite (f_n) converge simplement sur cet intervalle vers la fonction nulle (elle-même continue par morceaux), et est dominée par la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t}$, elle aussi intégrable. Cela suffit pour garantir que l'intégrale a pour limite 0.

4. La relation (1) s'en déduit en prenant $x = 1$; la (2) en prenant $x = -1/2$.

5. i. C'est le théorème sur les séries alternées.

ii. a) On a, pour tout $p \geqslant 1$, $\mathrm{S}_{p+2} - \mathrm{S}_p = (-1)^{p+1}(u_{p+2} - u_{p+1})$, du signe de $(-1)^p$ puisque la suite (u_n) décroît. En prenant $p = 2n$ (respectivement $2n-1$), on en déduit la croissance de la suite (S_{2n}) (respectivement la décroissance de (S_{2n-1})).

b) La suite (S_{2n}) croît, donc est majorée par sa limite S ; de même pour l'autre inégalité.

iii. On en déduit, pour tout $p \geqslant 1$:
$0 \leqslant \mathrm{S} - \mathrm{S}_{2p} \leqslant \mathrm{S}_{2p-1} - \mathrm{S}_{2p} = u_{2p}$ et $0 \leqslant \mathrm{S}_{2p-1} - \mathrm{S} \leqslant \mathrm{S}_{2p-1} - \mathrm{S}_{2p} = u_{2p} \leqslant u_{2p-1}$ ce qui fournit le résultat demandé pour tout $n \geqslant 1$, pair ou impair.

6. On applique les résultats du **5.** avec $u_n = 1/n$. On a alors, avec les notations du **5.** et grâce à la relation (1), $|\ln(2) - \mathrm{S}_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$. On peut donc prendre $\mathrm{N}_p = 10^p$.

7. i. On a pour tout $n \geqslant 1$: $\displaystyle 0 \leqslant \mathrm{R}_n \leqslant \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}}\,\frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^n}$.

ii. Puisque $\displaystyle\mathrm{R}_n = \ln(2) - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i2^i}$ et que $\mathrm{R}_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, il suffit d'avoir $\dfrac{1}{2^{\mathrm{N}'_p}} \leqslant 10^{-p}$ soit $\mathrm{N}'_p \geqslant \dfrac{\ln 10}{\ln 2}\,p$.

On peut donc prendre $\mathrm{N}'_p = 1 + \mathrm{E}\left(\dfrac{\ln 10}{\ln 2}\,p\right)$ où E désigne la partie entière.

iii. Les théorèmes sur les croissances comparées montrent que N'_p est négligeable devant N_p quand $p \to \infty$; autrement dit, la convergence de la deuxième série vers $\ln 2$ est beaucoup plus rapide que la première, ce dont on se doutait...

Partie II

1. Le polynôme $Q = P(-1) - P(X)$ s'annule en -1, donc est divisible par $X+1$; il existe donc bien un unique polynôme $R = \varphi_n(P)$ tel que $Q = (X+1)R$, qui est le quotient dans la division euclidienne de Q par $X+1$. De plus, on a $\deg Q = \deg(X+1) + \deg R = 1 + \deg R$, donc $R = \varphi_n(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}
[\lambda P + \mu Q](-1) - [\lambda P + \mu Q](X) &= \lambda\big(P(-1) - P(X)\big) + \mu\big(Q(-1) - Q(X)\big) \\
&= \lambda(X+1)\varphi_n(P) + \mu(X+1)\varphi_n(Q) \\
&= (X+1)\big(\lambda\varphi_n(P) + \mu\varphi_n(Q)\big)
\end{aligned}$$

La définition de φ_n montre alors que $\varphi_n(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi_n(P) + \mu\varphi_n(Q)$ donc que φ_n est linéaire.

D'autre part, on a clairement $\varphi_n(P) = 0 \Longleftrightarrow P(X) = P(-1)$, donc si et seulement si P est un polynôme constant. Le noyau de φ_n est donc l'espace des polynômes constants.

Cet espace est de dimension 1 ; le théorème du rang montre alors que l'image de φ_n est de dimension $(\dim \mathbb{R}_n[X]) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Cette image est donc $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tout entier, et donc φ_n est surjective.

3. On connaît l'identité $a^p - b^p = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k}b^k$, valable, pour tout $p \geqslant 1$, dans n'importe quel anneau commutatif.

Appliquée à $a = -1$ et $b = X$, elle donne pour $P = X^p$: $P(-1) - P(X) = -(1+X)\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}X^k$ soit : $\varphi_n(X^p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}X^k$ pour tout p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$. Puisque $\varphi_n(1) = 0$, la matrice cherchée est donc

$$M = \begin{pmatrix}
0 & -1 & 1 & \cdots & \cdots & (-1)^n \\
\vdots & 0 & -1 & 1 & & (-1)^{n-1} \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1
\end{pmatrix} \quad (M \in \mathbb{M}_{n,n+1}(\mathbb{R}))$$

4. On utilise la matrice : pour tout (i,j), a_i est la $(i+1)$-ème coordonnée de P dans la base canonique, et b_j la $(j+1)$-ème coordonnée de $\varphi_n(P)$. On a donc pour tout j :

$$b_j = \sum_{i=0}^{n} m_{j+1,i+1}a_i = \sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i-j}a_i$$

qui donne bien le résultat demandé puisque $(-1)^{-j} = (-1)^j$.

Partie III

1. Pour tout $a \in]0,1]$, posons $G(a) = \displaystyle\int_a^1 g(x)\,dx$. g étant positive, la fonction G est décroissante sur I (si $a < b$, $G(a) - G(b) = \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0$). De plus, on a $G(a) \leqslant \displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx$ puisque f est intégrable positive.

Ainsi, G décroissante majorée sur $]0,1]$: d'après le théorème de la limite monotone, $\lim\limits_{a\to 0^+} G(a)$ existe, i.e g intégrable sur I.

2. **a)** f_n est continue par morceaux et positive sur I ; de plus, pour tout $x \in I$, $f_n(x) \leqslant f(x)$. Le résultat découle donc directement de la question précédente.

b) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^1 f(x)\,dx$, on a $\displaystyle\lim_{a\to 0^+}\int_0^a f(x)\,dx = 0$. Par définition de la limite, il existe donc bien un réel $\alpha > 0$ tel que $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$.

α étant ainsi fixé, la fonction f, continue par morceaux, est bornée sur le segment $[\alpha, 1]$. Soit M un majorant de f sur cet intervalle. On a alors

$$0 \leqslant \int_\alpha^1 x^n f(x)\,dx \leqslant M\int_\alpha^1 x^n\,dx \leqslant M\int_0^1 x^n\,dx = \frac{M}{n+1}$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^1 x^n f(x)\,dx = 0$, ce qui implique, par définition de la limite, qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, on ait $\displaystyle\int_\alpha^1 x^n f(x)\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

En rassemblant les résultats précédents, on a donc, pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$0 \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^\alpha x^n f(x)\,dx + \int_\alpha^1 x^n f(x)\,dx \leqslant \int_0^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^1 x^n f(x)\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui prouve $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.

Remarque : cette démonstration rappelle furieusement celle du th. de Césaro ! !

3. Puisque f est positive sur I, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$: $0 \leqslant x^{n+1}f(x) \leqslant x^n f(x)$. En intégrant cette inégalité sur I (légitime d'après **2.**), on en déduit $u_{n+1}(f) \leqslant u_n(f)$ pour tout n.
D'autre part, la suite $\big(u_n(f)\big)$ a pour limite 0 d'après la question précédente.
Le théorème sur les séries alternées prouve alors que la série $\sum(-1)^n u_n(f)$ converge.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons S_n la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k(f)$. La question **I.1.** donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}f(x)}{1+x}\,dx = S_f$$

Puisque $0 \leqslant \dfrac{f(x)}{1+x} \leqslant f$ pour $x \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{1+x}$ est intégrable sur I d'après **III.1**, et, en lui appliquant les résultats de **III.2.b**, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+1}f(x)}{1+x}\,dx = 0$, d'où l'égalité $\mathscr{E}_f$ par passage à la limite.

5. i. La fonction f est bien intégrable sur I, les résultats précédents s'appliquent. Ici $u_n(f) = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout n, l'égalité $\mathscr{E}_f$ donne donc : $\displaystyle\ln 2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$. On retrouve donc l'égalité (1) du **I.4.**.

ii. La fonction f est ici aussi intégrable sur I : en effet, pour $a \in I$, on a
$\displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx = \int_a^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \big[\sqrt{x}\big]_a^1 = 1 - \sqrt{a}$ qui a bien une limite quand $a \to 0^+$.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle u_n(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1/2}\,dx = \frac{1}{2n+1}$.

D'autre part, le changement de variable $u = \sqrt{x}$, légitime puisque la fonction racine carrée est un C^1-difféomorphisme de I dans lui-même, donne $S_f = \int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}$. L'égalité $\mathscr{E}_f$ devient donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

iii. Encore une fois, on vérifie aisément que f est bien intégrable sur I ; et, pour tout n, $u_n(f) = \dfrac{1}{3n+1}$.

Le changement de variable $u = x^{1/3}$ fournit bien $S_f = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$. Puisque $1+X^3 = (1+X)(1-X+X^2)$, le coefficient de $1/(1+X)$ dans la décomposition en éléments simples de $1/(1+X^3)$ vaut $[1/(1-X+X^2)](-1) = 1/3$. On a alors

$$\frac{1}{1+X^3} - \frac{1}{3(1+X)} = -\frac{X^2-X-2}{3(X^3+1)} = -\frac{X-2}{3(X^2-X+1)} = -\frac{X-1/2}{3(X^2-X+1)} + \frac{1}{2(X^-X+1)}$$

qui est la décomposition proposée par l'énoncé avec $a = 1/3$, $b = -1/6$ et $c = 1/2$.

On a alors $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$, $\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx = \left[\ln(x^2-x+1)\right]_0^1 = 0$ et enfin, en utilisant $\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{t}{a}$: $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

On en déduit $S_f = a\ln 2 + c\,\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\ln 2}{3} + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

L'égalité $\mathscr{E}_f$ donne donc ici : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Partie IV

1. Découle immédiatement de $\dfrac{P(-1)-P(x)}{1+x} = \varphi_n(P)(x)$ pour tout $x \neq -1$.

2. On applique la question précédente à T_n, et on divise par $T_n(-1) \neq 0$; on obtient avec les notations de l'énoncé :

$$\left|S_f - \frac{S_n}{T_n(-1)}\right| = \frac{1}{|T_n(-1)|}\left|\int_0^1 \frac{T_n(x)}{1+x} f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{|T_n(-1)|}\int_0^1 \frac{|T_n(x)|}{1+x} f(x)\,dx \quad (f \geqslant 0)$$
$$\leqslant \frac{M_n}{|T_n(-1)|}\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\,dx = \frac{M_n S_f}{|T_n(-1)|}$$

Partie V

1. i. En utilisant la relation de récurrence vérifiée par (T_n), on obtient $v_{n+2} = 6v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii. La suite (v_n) vérifie donc une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants ; son polynôme caractéristique $X^2 - 6X + 1$ ayant deux racines simples $3+\sqrt{8}$ et $3-\sqrt{8}$, on obtient bien le résultat de l'énoncé.

iii. En écrivant l'égalité précédente aux rangs 0 et 1, on obtient $\alpha = \beta = 1/2$.

2. La relation $\deg T_n = n$ est vraie aux rangs 0 et 1.

Si elle est vraie jusqu'à un rang $n+1$, alors $\deg\big(2(1-2X)T_{n+1}\big) = n+2 > \deg T_n$ donc la relation de récurrence montre que $\deg T_{n+2} = n+2$.

On a donc bien prouvé par récurrence que $\deg T_n = n$ pour tout n.

D'autre part, puisque $3-\sqrt{8} > 0$, les résultats de **1.(i)** et **1.(ii)** montrent que $v_n > 0$ pour tout n : on a donc bien $T_n(-1) \neq 0$ pour tout n.

3. C'est vrai aux rangs 0 et 1 ; et, si c'est vrai jusqu'au rang $n+1$, la relation de récurrence montre que T_{n+2} est une différence de produits de polynômes à coefficients entiers, donc est lui-même un polynôme à coefficients entiers, ce qui achève la démonstration.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $T_0(\sin^2 x) = 1 = \cos(2.0.x)$ et $T_1(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x = \cos(2x)$. L'égalité proposée est donc vraie aux rangs 0 et 1.

Si l'on suppose l'égalité vraie jusqu'au rang $n+1$, alors $T_{n+2}(\sin^2 x) = 2\cos(2x)\cos(2(n+1)x) - \cos(2nx) = \cos(2(n+$ en utilisant $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, ce qui achève la démonstration.

5. Soit $x \in [0,1]$; alors $\sqrt{x} \in [0,1]$, on peut donc choisir $t \in [0, \pi/2]$ tel que $\sqrt{x} = \sin t$. On a alors $|T_n(x)| = |T_n(\sin^2 t)| = |\cos(2nt)| \leqslant 1$, et il y a égalité pour $x = 0$. On a donc bien $M_n = 1$.

D'autre part, puisque $3 - \sqrt{8} > 0$, on a $T_n(-1) = v_n > \dfrac{(3+\sqrt{8})^n}{2}$ pour tout n, ce qui fournit immédiatement l'inégalité demandée.

6. Prenons pour f la fonction constante égale à 1. Comme vu en **III.5.**, on a $S_f = \ln 2$.

D'autre part, on a vu en **3.** que les polynômes T_n sont à coefficients entiers. La question **II.4.** montre alors que les polynômes $\varphi_n(T_n)$ sont eux aussi à coefficients entiers. Par suite, les nombres $S_n = \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(T_n)(x)\,dx$ sont rationnels.

Puisque $v_0 = 1$ et $v_1 = 3$, une récurrence immédiate prouve que les nombres $v_n = T_n(-1)$ sont tous entiers. En posant $t_n = \dfrac{S_n}{T_n(-1)}$ pour tout n, les t_n sont donc tous rationnels.

Enfin, l'inégalité du **5.**, jointe au résultat du **IV.2.**, montre que $|\ln 2 - t_n| \leqslant \dfrac{K}{(3+\sqrt{8})^n}$ avec $K = 2S_f = 2\ln 2$.

Partie VI

1. La fonction g est construite à l'aide des opérations usuelles à partir de fonctions de classe C^5 ; son dénominateur ne s'annulant pas, elle est de classe C^5 sur $[0,1]$.

2. Il suffit d'effectuer le changement de variable $x = \sin^2 t$ dans l'intégrale ($dx = 2\sin t\cos t\, dt = \sin 2t\, dt$).

3. D'après la question précédente et **V.4.**, on a $4n^2 \displaystyle\int_0^1 \frac{T_n(x)}{1+x} f(x)\,dx = 4n^2 \int_0^{\pi/2} \cos(2nx) g(x)\,dx$ pour tout $n \geqslant 1$. Il suffit alors d'effectuer deux intégrations par parties successives sur cette dernière intégrale, en dérivant à chaque fois le facteur en g, pour obtenir la relation de l'énoncé.

4.
- i. Il suffit d'écrire la relation du **3.** aux rangs $n+2$ et n, puis de soustraire ces deux égalités.
- ii. Deux intégrations par parties successives donnent :

$$4n^2 \int_0^{\pi/2} \cos(2nx) g''(x)\,dx = (-1)^n g^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) - g^{(3)}(0) - \int_0^{\pi/2} \cos(2nx) g^{(4)}(x)\,dx$$

puis $4n^2 \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2nx) g''(x)\,dx = (-1)^n g^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) - g^{(3)}(0) + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nx)}{2n} g^{(5)}(x)\,dx$, après une nouvelle intégration par parties.

Posons $C_n = (-1)^n g^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - g^{(3)}(0)$. On a $C_{n+2} = C_n$ donc, en écrivant la relation précédente au rang $n+2$ et en utilisant **(i)**, on obtient après calculs : $U = \dfrac{C_n}{16}\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+2)^2}\right) - \dfrac{V}{16}$.

- iii. Tout d'abord, $|C_n|$ peut être majoré par la constante $|g^{(3)}(\pi/2)| + |g^{(3)}(0)|$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+2)^2} = \dfrac{4(n+1)}{n^2(n+2)^2} \leqslant \dfrac{4}{n^2(n+2)} \leqslant \dfrac{4}{n^3}$. Dans la relation précédente, le premier terme peut donc être majoré en valeur absolue par un K_1/n^3.

D'autre part, $|\mathrm{V}| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{1}{(n+2)^3}\right)|g^{(5)}(x)|\,dx \leqslant \int_0^{\pi/2}\frac{2}{n^3}|g^{(5)}(x)|\,dx$. La fonction $g^{(5)}$ est continue donc bornée sur le segment $[0,1]$; si M majore $|g^{(5)}|$ sur $[0,1]$, on obtient donc $|\mathrm{V}| \leqslant \dfrac{\pi\mathrm{M}}{n^3}$.

On a donc $|\mathrm{U}| \leqslant \dfrac{\mathrm{K}_1}{n^3}+\dfrac{|\mathrm{V}|}{16} \leqslant \dfrac{\mathrm{K}}{n^3}$ avec $\mathrm{K}=\mathrm{K}_1+\pi\mathrm{M}/16$.

5. On prend de nouveau pour f la fonction constante égale à 1, qui donne $\mathrm{S}_f=\ln 2$.
Soit $n \geqslant 1$. On applique le **IV.1.** à Q_n (au rang $n+2=\deg \mathrm{Q}_n$). Cela donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{U} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{Q}_n(x)f(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Q}_n(-1)\mathrm{S}_f - \int_0^1 \varphi_{n+2}(\mathrm{Q}_n)(x)f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \mathrm{Q}_n(-1)\ln 2-(n+2)^2\int_0^1 \varphi_{n+2}(\mathrm{T}_{n+2})(x)f(x)\,\mathrm{d}x + n^2\int_0^1 \varphi_n(\mathrm{T}_n)(x)f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \mathrm{Q}_n(-1)\ln 2-(n+2)^2\mathrm{S}_{n+2}+n^2\mathrm{S}_n
\end{aligned}$$

avec les notations du **IV**. En admettant provisoirement que $\mathrm{Q}_n(-1)\neq 0$, on a donc

$$\ln 2-\frac{(n+2)^2\mathrm{S}_{n+2}-n^2\mathrm{S}_n}{\mathrm{Q}_n(-1)}=\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{Q}_n(-1)}$$

Étudions donc les nombres $\mathrm{Q}_n(-1)=(n+2)^2v_{n+2}-n^2v_n$ avec les notations du **V.1.**. Notons déjà que la suite (v_n) est croissante : en effet $v_0\leqslant v_1$ et, si $v_n\leqslant v_{n+1}$, alors $v_{n+2}=6v_{n+1}-v_n\geqslant 5v_{n+1}\geqslant v_{n+1}$ puisque les v_n sont strictement positifs.
On en déduit $\mathrm{Q}_n(-1)=6(n+2)^2v_{n+1}-(n+2)^2v_n-n^2v_n \geqslant \left(5(n+2)^2-n^2\right)v_n\geqslant 4n^2v_n\geqslant 2n^2(3+\sqrt{8})^n$.
Cela montre en particulier qu'on a bien $\mathrm{Q}_n(-1)\neq 0$, et donc

$$\left|\ln 2-\frac{(n+2)^2\mathrm{S}_{n+2}-n^2\mathrm{S}_n}{\mathrm{Q}_n(-1)}\right|=\frac{|\mathrm{U}|}{|\mathrm{Q}_n(-1)|}\leqslant\frac{\mathrm{K}}{2n^5(3+\sqrt{8})^n}$$

Enfin on a déjà vu que les nombres S_n sont rationnels, et les nombres $\mathrm{Q}_n(-1)$ sont entiers puisque les v_n le sont ; donc les nombres $q_n=\dfrac{(n+2)^2\mathrm{S}_{n+2}-n^2\mathrm{S}_n}{\mathrm{Q}_n(-1)}$ sont bien rationnels.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆