CORRIGÉ : Suites convexes et quasi-convexes (d'après CENTRALE 1979)

PRÉLIMINAIRES

0.1 Si (a_n) est à variations bornés alors la série $\sum b_n$ est absolument convergente, donc convergente ; or $\sum_{n=1}^{N} b_n = a_N - a_0$ donc $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ est convergente.}}$

0.2 On peut faire la démonstration par récurrence sur N ou, directement, en faisant apparaître des sommes télescopiques (*c'est le principe de la transformation d'Abel !*) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n d_n = \sum_{n=1}^{N} n(b_n - b_{n+1}) &= \sum_{n=1}^{N} n b_n - \sum_{n=2}^{N+1}(n-1)b_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} b_n + \sum_{n=1}^{N}(n-1)b_n - \sum_{n=1}^{N}(n-1)b_n - N b_{N+1} = \sum_{n=1}^{N} b_n - N b_{N+1}.\end{aligned}$$

PARTIE I

I.1 On a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $d_n = b_n - b_{n+1}$ ce qui montre que
$\boxed{(a_n) \text{ est convexe si et seulement si } (b_n) \text{ est décroissante.}}$

I.2 $d_n = f(n-1) + f(n+1) - 2f(n)$ puis, on utilise l'égalité $n = \frac{1}{2}\Big((n+1)+(n-1)\Big)$ et le fait que f est convexe [1] , d'où, avec $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$f(n) \leqslant \frac{1}{2}\Big(f(n+1) + f(n-1)\Big).$$

$\boxed{\text{Conclusion : } (a_n) \text{ est convexe.}}$

I.3 On a donc (b_n) et $(-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissantes donc (b_n) est une suite constante ; ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n-1} - a_n = b_0$ d'où on en déduit, par une récurrence immédiate, que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = a_0 - n b_0.$$

La réciproque est immédiate.

$\boxed{\text{Conclusion : les suites convexes et d'opposé convexe sont les suites arithmétiques.}}$

I.4 Si $\alpha \geqslant 1$ alors, comme $f : x \mapsto x^\alpha$ est convexe, $a_n = n^\alpha$ est convexe.
Cela ne suffit bien sûr pas pour établir la réciproque ; en revanche, si $0 < \alpha < 1$ alors $f : x \mapsto x^\alpha$ est strictement concave (son opposé est strictement convexe) donc $d_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Conclusion : } (n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convexe si et seulement si } \alpha \geqslant 1.}$

I.5 **a)** Avec la calculatrice, pour $n = 9$, on calcule

$$a_9 = 27 \quad a_8 = \lfloor 8^{3/2} \rfloor = \lfloor 22,63....\rfloor = 22 \quad a_{10} = \lfloor 10^{3/2} \rfloor = \lfloor 31,62...\rfloor = 31$$

d'où $d_9 = -1$.

Il fallait cependant *prouver* les valeurs de a_8 et a_9.

On part donc de l'égalité entre entiers :

$$\underbrace{22^2}_{484} < \underbrace{8^3}_{512} < \underbrace{23^2}_{529}.$$

qui nous permet d'écrire que $22 < 8^{\frac{3}{2}} < 23$, et donc de conclure que $a_8 = 22$.

De même, $\underbrace{31^2}_{961} < \underbrace{10^3}_{1000} < \underbrace{32^2}_{1024}$

qui nous permet d'écrire que $31 < 10^{\frac{3}{2}} < 32$, et donc de conclure que $a_{10} = 31$.

$\boxed{\text{Conclusion : } d_9 = -1 < 0 \text{ donc la suite } (a_n) \text{ n'est pas convexe.}}$

1. C'est-à-dire que, pour tout x et y dans le domaine de définition de f, et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

b) On a

$$\begin{aligned}(n+1)^{\alpha}-1 &< \lfloor (n+1)^{\alpha} \rfloor \\ (n-1)^{\alpha}-1 &< \lfloor (n-1)^{\alpha} \rfloor \\ -2n^{\alpha} &\leqslant -2\lfloor n^{\alpha} \rfloor\end{aligned}$$

d'où, en additionnant ces inégalités, on trouve $d_n \geqslant (n+1)^{\alpha}+(n-1)^{\alpha}-2n^{\alpha}-2$.
Soit $f : x \mapsto (x+1)^{\alpha}+(x-1)^{\alpha}-2x^{\alpha}-2$;
alors $f(1)=2^{\alpha}-4 \geqslant 0$ (car $\alpha \geqslant 2$) puis $f' : x \mapsto \alpha\{(x+1)^{\alpha-1}+(x-1)^{\alpha-1}-2x^{\alpha-1}\}$ est à valeurs positives car $g : x \mapsto x^{\alpha-1}$ est convexe. Donc f est croissante et, de la propriété $f(1) \geqslant 0$, on tire que $f(n)$ est positif pour $n \geqslant 1$.

$\boxed{\text{Conclusion : Pour } \alpha \geqslant 2\text{, la suite } \left(\lfloor n^{\alpha} \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convexe.}}$

PARTIE II

II.1 ► (b_n) décroît et, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\mathrm{A} \leqslant a_n \leqslant \mathrm{A}$, on a : $b_n \geqslant -2\mathrm{A}$. Toute suite décroissante et minorée converge dans $\mathbb{R}$, donc $\boxed{(b_n) \text{ converge.}}$

► Supposons $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, alors (a_n) ne serait pas bornée ; en effet, en supposant par exemple $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $b_n \geqslant \dfrac{b}{2} > 0$, d'où par une récurrence immédiate, $\forall n \geqslant n_0,\ a_n \leqslant a_{n_0} - \dfrac{n-n_0}{2} b$, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to-\infty} a_n = -\infty$: contradiction. ◄

(*Rem :* Plus rapidement, on pouvait utiliser le lemme de l'escalier, si $b_n = a_{n-1}-a_n$ converge vers b non nul, alors a_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$ à $-nb$ ...)

$\boxed{\text{Conclusion : } \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0.}$

On remarquera que, la suite (b_n) étant décroissante, on a également établi que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \geqslant 0$.

II.2 On a $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} b_n = a_0 - a_{\mathrm{N}}$ et comme (a_n) est bornée, que $b_n \geqslant 0$, on en déduit que la série positive $\sum b_n$, ayant ses sommes partielles majorées, converge ; par conséquent, la suite (a_n) est convergente.
Autre solution : puisque $b_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (a_n) est décroissante ; puisqu'elle est minorée, elle converge donc.

II.3 On écrit

$$\begin{aligned}a_p - a_n &= \sum_{k=p+1}^{n} b_k \\ &\geqslant (n-p)b_n (\text{car } (b_n) \text{ décroît}) \\ &\geqslant \frac{n}{2} b_n (\text{car } -p \geqslant -\frac{n}{2} \quad \text{et} \quad b_n \geqslant 0)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{donc } 0 \leqslant n\, b_n \leqslant 2(a_p - a_n).}$

Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant 2n\, b_{2n} \leqslant 2(a_{2n} - a_n) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant (2n+1)\, b_{2n+1} \leqslant 2(a_{2n+1} - a_n)$$

et ce deuxième membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
On a donc montré $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} n\, b_n = 0.}$

L'inégalité $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant n\, b_{n+1} \leqslant (n+1)\, b_{n+1}$ suffit alors pour conclure que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} n\, b_{n+1} = 0.}$

II.4 Tout d'abord, notons que, puisque (a_n) converge, la série $\sum b_n$ converge. On utilise l'égalité de la question O.2 et comme $\lim\limits_{\mathrm{N}\to\infty} \mathrm{N}\, b_{\mathrm{N}+1} = 0$, la série $\sum n\, d_n$ converge puis, par passage à la limite, on obtient la relation $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\, d_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n}$

PARTIE III

III.1 En utilisant l'inégalité de l'indication et l'inégalité triangulaire, et on fait la somme sur n, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}|b_n| &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| + \sum_{n=1}^{N} \mathbf{a)} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{N}\left|b_p - b_{p+1}\right| + \sum_{p=n}^{N-1}\frac{N-p}{N}\left|b_p - b_{p+1}\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| + \sum_{p=1}^{N-1}\frac{1}{N}\left|b_p - b_{p+1}\right|\cdot\left(p(N-p)+(N-p)p\right)\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\left|b_p - b_{p+1}\right|$ intervient $N-p$ fois dans la première somme, p fois dans la deuxième, d'où

$$\sum_{n=1}^{N}|b_n| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| + \sum_{p=1}^{N-1} 2p\left|b_p - b_{p+1}\right| \text{ (en majorant } N-p \text{ par N)}$$

On a donc l'inégalité demandée (p et n sont des variables muettes) ; on en déduit que $\sum_{n=1}^{N}|b_n|$ est majorée donc la série $\sum b_n$ est absolument convergente :

$\boxed{\text{Conclusion : } (a_n) \text{ est à variations bornées.}}$ (et donc convergente.)

III.2 La première inégalité est évidente car la série $\sum b_n$ est convergente. La deuxième est tout aussi évidente car $a_0 - a_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$ et en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on peut conclure.

III.3 En utilisant l'égalité de la question O.2, on a

$$Nb_{N+1} = \sum_{n=1}^{N} b_n - \sum_{n=1}^{N-1} n d_n$$

donc $(N b_{N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ a une limite et cette limite ne peut être que 0 (sinon $\sum b_n$ divergerait) d'où, quand $N \to +\infty$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n d_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.}$$

PARTIE IV

IV.1 On sait (question O.2) que $\sum_{m=1}^{n} m(a_m - a_{m+1}) = \sum_{m=1}^{n} a_m - n a_{n+1}$ (en remplaçant b par a et N par n). Or

$$n(n+1)(c_n - c_{n+1}) = (n+1)\sum_{m=1}^{n} a_m - n\sum_{m=1}^{n+1} a_m = \sum_{m=1}^{n} a_m - n a_{n+1}$$

d'où

$c_n - c_{n+1} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{m=1}^{n} m(a_m - a_{m+1})$ en divisant par $n(n+1)$ et en remarquant que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Ensuite,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}|c_n - c_{n+1}| &\leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{m=1}^{n} m\,|a_m - a_{m+1}| \\ &\leqslant \sum_{m=1}^{N} m\,|a_m - a_{m+1}| \underbrace{\sum_{n=m}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}_{=\frac{1}{m}-\frac{1}{N+1}\leqslant\frac{1}{m}} \text{ (en permutant les sommes)}\end{aligned}$$

et donc $\boxed{\sum_{n=1}^{N}|c_n - c_{n+1}| \leqslant \sum_{m=1}^{N}|a_m - a_{m+1}|.}$

IV.2 On écrit

$$\begin{aligned}n(n+1)(c_{n+1} - c_n) &= -\sum_{m=1}^{n} m(a_m - a_{m+1}) = -n(a_n - a_{n+1}) - \sum_{m=1}^{n-1} m(a_m - a_{m+1}) \\ &= -n(a_n - a_{n+1}) + n(n-1)(c_n - c_{n-1})\end{aligned}$$

d'où, en écrivant que $c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n=-(c_n-c_{n-1})+(c_{n+1}-c_n)$,

$$\boxed{c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n=\frac{1}{n+1}\big((a_{n+1}-a_n)-2(c_n-c_{n-1})\big).}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} n\,|c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n| &\leqslant \sum_{n=2}^{N}\frac{n}{n+1}(|a_{n+1}-a_n|+2|c_n-c_{n-1}|)\\ &\leqslant \sum_{n=2}^{N}|a_{n+1}-a_n|+2\sum_{n=1}^{N-1}|a_{n+1}-a_n| \text{ (relation du IV.1)}\\ &\leqslant 3\sum_{n=1}^{N}|a_{n+1}-a_n|\end{aligned}$$

donc, la série $\sum n|c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n|$ converge, (c_n) est quasi-convexe et, par passage à la limite, on a

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} n\,|c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n|\leqslant 3\sum_{n=1}^{+\infty}|a_{n+1}-a_n|.}$$

IV.3 Comme (a_n) est bornée, (c_n) est bornée, or, dans la partie III, on a vu qu'une suite quasi-convexe et bornée était à variations bornées donc (c_n) est à variations bornées. On utilise ensuite la relation de la question IV.2 :

$$(n+1)\big(c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n\big)+2(c_n-c_{n-1})=a_{n+1}-a_n$$

d'où $|a_{n+1}-a_n|\leqslant(n+1)|c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n|+2|c_n-c_{n-1}|$,
et par conséquent $\boxed{(a_n) \text{ est à variations bornées et convergente.}}$

IV.4 On a $b_n\geqslant 0$, $\sum b_n$ peut être considéré comme la somme de deux séries $\displaystyle\sum_{n\neq 2^p}\frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{p}\frac{1}{2^p}$, qui convergent toutes deux.

La suite (a_n) est donc à variations bornées. Vu la question IV.2, la suite (c_n) est quasi-convexe.
On utilise à nouveau l'égalité préliminaire O.2 ; comme $(\mathrm{N}\,b_{\mathrm{N}+1})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite, $\sum n\,d_n$ diverge :
$\boxed{\text{On ne peut donc avoir l'égalité proposée.}}$

IV.5 $(i)\Longrightarrow(ii)$ Supposons que la série $\sum\dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ est absolument convergente, alors

$$\frac{|c_n|}{n+1}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)|a_1+\cdots+a_n|\leqslant\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)(|a_1|+\cdots+|a_n|)$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{|c_n|}{n+1} &\leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\sum_{p=1}^{n}|a_p|\\ &=\sum_{p=1}^{N}|a_p|\sum_{n=p}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \text{ (en permutant les sommes)}\\ &\leqslant\sum_{p=1}^{N}|a_p|\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{N+1}\right)\leqslant\sum_{p=1}^{N}\frac{|a_p|}{p}\end{aligned}$$

donc $\sum\dfrac{c_n}{n+1}$ est absolument convergente.

$(ii)\Longrightarrow(i)$ Étudions maintenant le cas où la série $\sum\dfrac{c_n}{n+1}$ est absolument convergente.
Comme $a_{n+1}=(n+1)c_{n+1}-nc_n=(n+1)(c_{n+1}-c_n)+c_n$ alors

$$\frac{|a_{n+1}|}{n+1}\leq|c_{n+1}-c_n|+\frac{|c_n|}{n+1}$$

et, vu que (c_n) est à variations bornées, on en déduit que $\sum\dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ est absolument convergente.

PARTIE V

V.1 On compare une somme et une intégrale par les techniques habituelles de monotonie :

$$\sum_{m=2}^{p} \frac{1}{m} \leqslant \int_1^p \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln p,$$

ce qui donne $\displaystyle\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m} \leqslant 1 + \ln p$.

Ensuite, grâce à $||a|-|b|| \leqslant |a-b|$ on a

$$\Big||a_p \ln p - a_{p+1}\ln(p+1)| - |a_p - a_{p+1}|\ln p\Big| \leqslant |a_{p+1}| \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \leqslant \frac{|a_{p+1}|}{p}.$$

V.2 $(i) \Longrightarrow (ii)$ On suppose que la suite $(a_n \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et que la série $\sum (a_{n+1}-a_{n+2})\ln(n+1)$ est absolument convergente. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{|a_n|}{n} &\leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n}\left(\sum_{p=n}^{\mathrm{N}-1} |a_p - a_{p+1}| + |a_{\mathrm{N}}|\right)\\ &\leqslant \sum_{p=1}^{\mathrm{N}-1} |a_p - a_{p+1}| \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} + |a_n| \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n}\\ &\leqslant \sum_{p=1}^{\mathrm{N}-1} |a_p - a_{p+1}|(1+\ln p) + |a_{\mathrm{N}}|(1+\ln \mathrm{N})\end{aligned}$$

ce qui permet de dire que $\sum \frac{|a_n|}{n}$ converge, et il en est de même de $\sum \frac{|a_{n+1}|}{n}$. On utilise alors la deuxième relation de la partie V qui donne

$$|a_p \ln p - a_{p+1}\ln(p+1)| \leqslant |a_p - a_{p+1}|\ln p + \frac{|a_{p+1}|}{p}$$

et on peut conclure que $\sum a_p \ln p - a_{p+1}\ln(p+1)$ converge.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Supposons que les séries $\sum \frac{a_n}{n}$ et $\sum (a_n \ln n - a_{n+1}\ln(n+1))$ sont absolument convergentes. Alors, en utilisant la deuxième inégalité ci-dessus, on a

$$|a_p - a_{p+1}|\ln p \leqslant \frac{|a_{p+1}|}{p} + |a_p \ln p - a_{p+1}\ln(p+1)|$$

donc $\sum (a_p - a_{p+1})\ln p$ est absolument convergente.

Puis, la convergence de $\sum (a_p \ln p - a_{p+1}\ln(p+1)$ entraîne la convergence de la suite $(a_n \ln n)$. Si cette limite ℓ est non nulle alors $\sum \frac{a_p}{p}$ diverge ($a_n \sim \frac{\ell}{n \ln n}$), ce qui est impossible.

Conclusion : $\sum (a_p - a_{p+1})\ln p$ est absolument convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ln n = 0$.

V.3 $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{1}{n}$. (ou bien $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais ce n'est pas un exemple intéressant !)

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆