DM N°9 (pour le 28/01/2011)

Notations.

On note :
- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,
- e : le nombre réel dont le logarithme népérien est égal 1.

Pour x appartenant à $\mathbb{R}$, on note $|x|$ la valeur absolue de x.
Pour tout entier naturel, on note $n!$ la factorielle de n avec la convention $0!1=$.
Si j et n sont deux entiers naturels fixes tels que $0 \leqslant j \leqslant n$, on note :
- $[|j,n|]$ l'ensemble des naturels k vérifiant $j \leqslant k \leqslant n$,
- $\binom{n}{j}$ le nombre de parties ayant j éléments d'un ensemble de n éléments.

On rappelle que pour tout entier naturel j élément de $[|0,n|]$ on a : $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$.

Si f est une fonction k fois dérivable sur un intervalle I (avec $k \geqslant 1$) on note f' (resp. $f^{(k)}$) sa fonction dérivée (resp. sa fonction dérivée k-ième).
Si u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, donc une suite réelle, on utilise la notation usuelle : $u(n) = u_n$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.
Soit x un nombre réel, on rappelle que s'il existe un nombre entier p qui vérifie $|p-x| < \frac{1}{2}$ alors p est l'entier le plus proche de x.

Objectifs.

L'objet du problème est d'une part d'établir, pour tout entier naturel non nul, un lien entre l'entier naturel β_n le plus proche de $e^{-1}n!$ et le nombre γ_n d'éléments sans point fixe du groupe symétrique $\mathscr{S}_n$ et d'autre part, d'étudier l'écart $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$.
Dans la partie I on étudie β_n et on le caractérise grâce à une récurrence, dans la partie II on étudie γ_n et on établit un lien avec β_n. La partie III est consacrée à une estimation de δ_n puis à une étude des deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \delta_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.

1 Les suites α et β.

On définit la suite α par $\alpha_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1}$$

On rappelle que pour tout x réel, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente, et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$; en particulier, pour $x=-1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $\beta_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ et $\rho_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.

I.1. Etude de la suite α.

I.1.1 Expliciter α_k pour k dans $[|0,4|]$.

I.1.2 Montrer que α_n est un entier naturel pour tout n de $\mathbb{N}$.

I.2. Etude de la suite β.

I.2.1 Expliciter β_k pour k dans $[|0,4|]$.

I.2.2 Montrer que β_n est un entier relatif pour tout n de $\mathbb{N}$.

I.2.3 Expliciter $\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n$ en fonction de n, pour tout entier n de $\mathbb{N}$.

I.2.4 Comparer les deux suites α et β.

I.3. Etude de ρ_n.

I.3.1 Préciser le signe de ρ_n en fonction de l'entier naturel n.

I.3.2 Etablir, pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante : $n!|\rho_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$. L'inégalité est-elle stricte ?

I.3.3 Déduire de ce qui précède que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, β_n est l'entier naturel le plus proche de $e^{-1}n!$.

I.4. Etude d'une fonction.

On désigne par f la fonction définie et de classe C^1 (au moins) sur l'intervalle $]-1,1[$ à valeurs réelles, vérifiant les deux conditions :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in]-1,1[,\ (1-x)f'(x) - xf(x) = 0$$

I.4.1 Justifier l'existence et l'unicité de la fonction f. Expliciter $f(x)$ pour tout x de $]-1,1[$.

I.4.2 Justifier l'affirmation : "f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$".

I.4.3 Expliciter $(1-x)f(x)$, puis exprimer pour tout entier naturel n :

$$(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x)$$

en fonction de n et de x.

I.4.4 En déduire une relation, valable pour tout entier naturel n, entre β_n et $f^{(n)}(0)$.

2 La suite γ.

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel.

Pour $n \geqslant 1$, on note :

— $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[|1,n|]$,

— γ_n le nombre d'éléments de $\mathscr{S}_n$ sans point fixe (τ appartenant à $\mathscr{S}_n$ est sans point fixe si pour tout k de $[|1,n|]$, on a $\tau(k) \neq k$).

Pour $n = 0$ on adopte la convention : $\gamma_0 = 1$.

II.1. Calculer γ_1 et γ_2.

II.2. Classer les éléments de $\mathscr{S}_3$ selon leur nombre de points fixes et calculer γ_3.

II.3. On suppose dans cette question que $n = 4$.

II.3.1 Quel est le nombre d'éléments τ appartenant à $\mathscr{S}_4$ ayant deux points fixes ?

II.3.2 Quel est le nombre d'éléments τ appartenant à $\mathscr{S}_4$ ayant un point fixe ?

II.3.3 Calculer γ_4.

II.4. Relation entre les γ_k.

II.4.1 Rappeler sans justification le nombre d'éléments de $\mathscr{S}_n$.

II.4.2 Si $0 \leqslant k \leqslant n$, combien d'éléments de $\mathscr{S}_n$ ont exactement k points fixes ?

II.4.3 Etablir pour tout entier naturel n la relation : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\gamma_k = n!$.

II.5. On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\gamma_n}{n!}x^n$ et l'on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{n!}x^n$ lorsque la série converge.

II.5.1 Montrer que cette série est absolument convergente pour $|x| < 1$.

II.5.2 Pour tout x de $]-1,1[$, on pose $g(x) = e^x g(x)$. Justifier l'existence du développement en série entière de la fonction h sur $]-1,1[$ et expliciter ce développement.

II.5.3 Expliciter $g(x)$ pour tout nombre réel x de $]-1,1[$.

II.5.4 Comparer les deux suites β et γ.

II.5.5 La fonction g est-elle définie en 1 ?

II.5.6 La fonction g est-elle définie en -1 ?

II.5.7 Calculer γ_8.

3 Sur $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$.

Pour tout entier naturel n, on note :

— $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$.

— $J_n = \int_0^1 x^n e^x\, dx$.

— $v_n = (-1)^{n+1}J_n$.

III.1. La série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$.

III.1.1 Quelle est la limite de J_n lorsque n tend vers $+\infty$?

III.1.2 Etablir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$.

III.2. Estimation intégrale de δ_n.

III.2.1 Justifier, pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt \tag{1}$$

III.2.2 Déduire de (1) l'expression de δ_n en fonction de v_n.

III.3. Sur la série $\sum_{n\geqslant 0} \delta_n$.

Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \delta_n$; la convergence est-elle absolue ?

III.4. Sur la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.

III.4.1 Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.

III.4.2 On pose $A = -\int_0^1 e^x \ln(1-x) \, dx$.

III.4.2.1 Justifier la convergence de l'intégrale impropre A.

III.4.2.2 Exprimer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}$ en fonction de l'intégrale A.

III.4.3 Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$ et expliciter la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$ en fonction de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}$.

III.4.4 Expliciter un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ vérifiant $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n} - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{600}$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆