DS°7 (le 13/03/2011)

UN problème au choix ...

Problème 1 : E3A PSI 2002)

Les calculatrices sont interdites.
Dans tout le problème, a et b désignent deux réels positifs tels que : $0 < a < b$.

Préliminaire.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On admettra dans tout le problème que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x > 0 \ , \ u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Question 1.

1.1. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall x > 0 \ , \ u_n(x) \geqslant 0$.

1.2. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans toute la suite du problème, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est notée S et γ désigne la valeur de $\mathrm{S}(1)$.

Question 2.

2.1. Prouver que S est dérivable sur $[a, b]$.

2.2. En déduire que S est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0 \ , \ \frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}x}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

Question 3.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que lorsque p tend vers l'infini : $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} = \ln p + \gamma + o(1)$.

Question 4.

4.1. Prouver que :

$$\sum_{n=1}^{p} \big(u_n(x+1) - u_n(x)\big) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} + \ln(1+x) - \ln(p+1+x).$$

4.2. En déduire que :

$$\forall x > 0 \ , \ \mathrm{S}(x+1) = \mathrm{S}(x) + \gamma + \ln(1+x).$$

Question 5.

Soit φ la fonction définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x > 0 \ , \ \varphi(x) = \frac{1}{x} \exp\big(-\gamma x + \mathrm{S}(x)\big).$$

5.1. Montrer que $\forall x>0$, $\varphi(x+1)=x\,\varphi(x)$.

5.2. Vérifier que φ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Calculer $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x)$ pour $x>0$. Que vaut $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(1)$?

Question 6.

Pour $n\geqslant 1$, soit φ_n la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x>0\ ,\ \varphi_n(x)=\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Montrer que $\forall x>0$, $\ln\big(\varphi_n(x)\big)$ tend vers $\mathrm{S}(x)-x\gamma-\ln x$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 7.

On note $\pi_p=\displaystyle\prod_{n=1}^{p}\frac{\exp\left(\frac{x}{n}\right)}{1+\frac{x}{n}}$ (p entier naturel >0).

7.1. Prouver la convergence de la suite $(\pi_p)_{p\geqslant 1}$ vers une limite $\mathrm{L}(x)$.

7.2. En déduire que : $\forall x>0$, $\varphi(x)=\dfrac{\mathrm{L}(x)}{x}\exp(-x\gamma)$.

Partie 2.

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par : $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)\,\mathrm{d}t$.

Question 1.

1.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

1.2. Calculer $\Gamma(1)$.

1.3. Montrer que $\forall x>0$, $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$.

Question 2.

Pour n entier naturel $\geqslant 1$, on définit la fonction g_n de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$t\mapsto\begin{cases}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0\leqslant t<n,\\ 0 & \text{si } t\geqslant n\end{cases}$$

2.1. Prouver que : $\forall t\geqslant 0$, $\exp(-t)\geqslant 1-t$.

En déduire que : $\forall t\geqslant 0$, $\forall n\geqslant 1$, $0\leqslant g_n(t)\leqslant \exp(-t)$.

2.2. Montrer alors que :

$$\forall x>0\ ,\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt=\Gamma(x).$$

Question 3.

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on définit la fonction I_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{I}_n(x)=\int_0^1(1-t)^n t^{x-1}dt.$$

3.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction I_n.

3.2. Prouver que :

$$\forall x>0\ ,\ \forall n\geqslant 1\ ,\ \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = n^x \mathrm{I}_n(x).$$

3.3. Trouver une relation entre $\mathrm{I}_n(x)$ et $\mathrm{I}_{n-1}(x+1)$ et en déduire que :

$$\forall x>0\ ,\ \Gamma(x)=\varphi(x).$$

Partie 3.

Dans toute cette partie, $x\in\,]0,1[$.

Question 1.

Vérifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t)\ln^2 t\, dt$.

Question 2.

Soit $n\in\mathbf{N}$. On définit les fonctions :

v_n de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall t>0\ ,\ v_n(t)=\dfrac{x^n}{n!}\exp(-t)(\ln t)^n$

et T_n de $]1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall u>1\ ,\ \mathrm{T}_n(u)=\displaystyle\int_{1/u}^{u} v_n(t)dt$.

2.1. Pour $u>1$ donné, montrer que la série de fonctions de terme général v_n converge normalement sur $\left[\dfrac{1}{u},u\right]$.

2.2. Justifier que : $\forall u>1\ ,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{T}_n(u)=\int_{1/u}^{u}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\right)dt$.

Question 3.

On pose, pour $n\in\mathbf{N}$:

$$a_n=\frac{x^n}{n!}\int_0^1 \exp(-t)|\ln t|^n dt \quad \text{et} \quad b_n=\frac{x^n}{n!}\int_1^{+\infty}\exp(-t)(\ln t)^n\,dt.$$

3.1. Montrer que :

$$\forall p\geqslant 0\ ,\ \sum_{n=0}^{p}(a_n+b_n)\leqslant \int_0^{+\infty}\exp(-t+x|\ln t|)\,dt.$$

3.2. En déduire que la série de fonctions de terme général T_n converge normalement sur $]1,+\infty[$.

Question 4.

4.1. Vérifier que $\forall x\in\,]0,1[\ ,\ \Gamma(1+x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\exp(-t)(\ln t)^n\right)dt$.

4.2. Prouver alors que :

$$\forall x\in\,]0,1[\ ,\ \Gamma(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\left(\int_0^{+\infty}\exp(-t)(\ln t)^n\,dt\right).$$

Question 5.

5.1. A l'aide des parties 1 et 2, vérifier que :

$$\frac{\frac{d\Gamma}{dx}(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

puis que $\displaystyle \frac{\frac{d\Gamma}{dx}(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}}x^k\right).$

5.2. En admettant que l'on peut intervertir dans la formule précédente les deux sommations, prouver que :

$$\forall x \in\,]0,1[\ ,\ \Gamma(1+x) = \exp\left(-\gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}\zeta(k)\right).$$

5.3. Démontrer alors le résultat : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t)\ln^2 t\ \mathrm{d}t = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.$

Problème 2 : CENTRALE MP 2009)

Notations

On note E l'espace vectoriel normé des applications continues du segment $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $f \mapsto \left\|f\right\| = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|f(t)\right|$, et $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans lui-même.

Soit v un élément de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, et f un élément de E ; l'image de f par v est notée vf. L'espace $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ est muni de la norme $v \mapsto |||v||| = \sup\limits_{\|f\|\leqslant 1}\left\|vf\right\|$.

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés d'un opérateur appliquant E dans lui-même qui est introduit dans la troisième partie. Pour ce faire, on met en place dans les deux premières parties des outils nécessaires à cette étude.

Rappels

La deuxième fonction eulérienne notée Γ est la fonction réelle définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par la formule suivante :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad , \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et, pour tout entier naturel k et tout nombre réel $x>0$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

De plus, pour tout $x>0$, cette fonction vérifie l'équation

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Comme $\Gamma(1)=1$, il en découle que, pour tout entier naturel n,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Partie I : Questions préliminaires

I.1) Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]1,2[$ tel que $\Gamma'(c)=0$.

I.2) En déduire que la fonction Γ est strictement croissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$.

I.3) Montrer que, pour tout nombre réel $\gamma>0$,

$$\gamma^x = \circ(\Gamma(x)) \quad \text{au voisinage de } +\infty$$

Partie II : Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence

II.A - Soit ϕ une application continue de l'intervalle $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On suppose de plus qu'il existe un nombre réel $t_0 \geqslant 0$ tel que la fonction ϕ soit décroissante sur l'intervalle $[t_0,+\infty[$.

II.A.1) Établir que la fonction ϕ est positive sur l'intervalle $[t_0,+\infty[$.
(on pourra raisonner par l'absurde).

II.A.2) Soit h un réel strictement positif.

a) Prouver que pour n suffisamment grand, $0 \leqslant h\phi(nh) \leqslant \displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)$ converge.

II.A.3) (☕)Prouver que

$$\lim_{h\to 0, h>0} h\sum_{n=0}^{+\infty}\phi(nh)=\int_0^{+\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}t$$

(On pourra introduire un nombre réel a suffisamment grand et écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)=\sum_{n=0}^{\left[\frac{a}{h}\right]} h\phi(nh)+\sum_{n=\left[\frac{a}{h}\right]+1}^{+\infty} h\phi(nh)$$

où $\left[\dfrac{a}{h}\right]$ désigne la partie entière de $\dfrac{a}{h}$.)

II.B - Pour tout nombre réel $\alpha\geqslant 1$, on note g_α la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par la formule $g_\alpha(t)=\mathrm{e}^{-t}t^{\alpha-1}$.

II.B.1) Vérifier que la fonction g_α satisfait aux conditions du II.A.
En déduire que

$$\lim_{x\to 1, x<1}(-\ln x)\sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n\ln x)=\Gamma(\alpha)$$

II.B.2) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n$.

a) Établir que le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1. On note S_α la somme de cette série entière.

b) Prouver que, lorsque x tend vers 1 avec $x<1$, alors :

$$\mathrm{S}_\alpha(x)\sim\frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}$$

Partie III : La première fonction eulérienne

III.A -

III.A.1) Établir que, pour tout couple (α,β) de nombres réels strictement positifs, la fonction $t\mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$.

Pour tout couple (α,β) de nombres réels strictement positifs, on pose :

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$$

III.A.2) Prouver successivement pour tout couple (α,β) de nombres réels strictement positifs les relations suivantes :

(i) $\quad\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\mathrm{B}(\beta,\alpha)$

(ii) $\quad\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}t$ (on pourra utiliser le changement de variable $u=\dfrac{t}{1-t}$.)

(iii) $\quad\mathrm{B}(\alpha+1,\beta)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta)$

III.B - On se propose d'établir pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $\beta > 0$ la formule suivante :

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

III.B.1) À l'aide de la relation (iii) montrer qu'il suffit de prouver l'assertion lorsque les réels α et β sont strictement supérieurs à 2.

III.B.2) Soient α et β deux nombres réels strictement supérieurs à 2. Pour tout entier n strictement positif, on pose

$$u_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1}$$

a) Établir que la fonction $\psi_{\alpha,\beta} : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est lipschitzienne sur le segment $[0,1]$.

On note $\mathrm{A}_{\alpha,\beta}$ un rapport de Lipschitz de cette fonction, c'est-à-dire que :

$$\forall (x,y)\in[0,1]^2 \quad , \quad \left|\psi_{\alpha,\beta}(x)-\psi_{\alpha,\beta}(y)\right| \leqslant \mathrm{A}_{\alpha,\beta}\left|x-y\right|$$

b) Prouver que, pour tout entier n strictement positif :

$$\left|u_n(\alpha,\beta)-\mathrm{B}(\alpha,\beta)\right| \leqslant \frac{\mathrm{A}_{\alpha,\beta}}{2n}$$

c) On reprend les notations de la question II.B.2.

Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$:

$$\mathrm{S}_\alpha(x)\mathrm{S}_\beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n$$

Déduire de la question 2.b) que, pour tout réel x, $0 \leqslant x < 1$,

$$\left|\mathrm{S}_\alpha(x)\mathrm{S}_\beta(x) - \mathrm{B}(\alpha,\beta)\mathrm{S}_{\alpha+\beta}(x)\right| \leqslant \frac{\mathrm{A}_{\alpha,\beta}}{2}\mathrm{S}_{\alpha+\beta-1}(x)$$

En utilisant le comportement des fonctions $(\mathrm{S}_\gamma)_{\gamma\geqslant 1}$ au voisinage du point 1, conclure que :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \mathrm{B}(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$$

III.C - Formule des compléments.

III.C.1) Établir que la fonction $\alpha \mapsto \mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha)$ est continue sur l'intervalle $]0,1[$.

III.C.2) Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$.

a) Vérifier que :

$$\mathrm{B}\left(\frac{2p+1}{2q}, 1-\frac{2p+1}{2q}\right) = 2q\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t$$

b) Pour tout entier k compris entre 0 et $q-1$, on note :

$$z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k+1}{2q}\pi}$$

Établir que :

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{X}^{2p}}{1+\mathrm{X}^{2q}} = -\frac{1}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\left(\frac{1}{\mathrm{X}-z_k}-\frac{1}{\mathrm{X}+z_k}\right)$$

c) Après avoir vérifié que, pour tout nombre complexe c de partie imaginaire non nulle, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left((t-\mathscr{Re}\,c)^2+(\mathscr{Im}\,c)^2\right)+\mathrm{i}\,\mathrm{Arc}\tan\left(\dfrac{t-\mathscr{Re}\,c}{\mathscr{Im}\,c}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$t \mapsto \dfrac{1}{t-c}$, prouver, en utilisant judicieusement la relation $(*)$, que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$$

En conclure que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2q}\frac{1}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}$$

III.C.3) Déduire de III.C.1 et III.C.2 que :

$$\forall \alpha \in]0,1[\quad , \quad \mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Partie IV : L'opérateur d'Abel

Dans toute cette dernière partie, on suppose que α est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

IV.A -

IV.A.1) Établir que pour toute fonction f de E et pour tout réel x de l'intervalle $]0,1]$, la fonction $f \mapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,x[$.

IV.A.2) Pour tout élément f de E, on note $\mathrm{A}_\alpha f$ la fonction définie sur le segment $[0,1]$ par les formules suivantes :

$$\mathrm{A}_\alpha f(x) = 0 \quad \text{si } x = 0$$
$$\mathrm{A}_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad \text{si } 0 < x \leqslant 1$$

a) Vérifier que, pour tout f élément de E et tout réel x du segment $[0,1]$,

$$\mathrm{A}_\alpha f(x) = x^{1-\alpha}\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que, pour tout élément f de E, la fonction $\mathrm{A}_\alpha f$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

c) Établir que l'application $\mathrm{A}_\alpha : f \mapsto \mathrm{A}_\alpha f$ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé E et que :

$$|||\mathrm{A}_\alpha||| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} \left\|\mathrm{A}_\alpha f\right\| = \frac{1}{1-\alpha}$$

IV.B - On définit la suite $(\mathrm{A}_\alpha^n)_{n\geqslant 0}$ par la condition initiale $\mathrm{A}_\alpha^0 = id_\mathrm{E}$ (application identique de E) et, pour tout $n \geqslant 0$, par la relation de récurrence suivante :

$$\mathrm{A}_\alpha^{n+1} = \mathrm{A}_\alpha \circ \mathrm{A}_\alpha^n$$

IV.B.1) On pose $\beta = 1-\alpha$.

a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout f élément de E et pour tout x du segment $[0,1]$, établir l'inégalité suivante :

$$\left|\mathrm{A}_\alpha^n f(x)\right| \leqslant \frac{x^{n\beta}(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\left\|f\right\|$$

b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, A_α^n est un endomorphisme continu de E et que :

$$|||\mathrm{A}_\alpha^n||| \leqslant \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}$$

IV.B.2) Pour tout nombre réel positif γ, montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0$$

On pourra utiliser le résultat de la question préliminaire I.3.

IV.B.3) Soient λ un nombre complexe non nul et f un élément de E.

a) Prouver que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \mathrm{A}_\alpha^n f$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$.

On note g la somme de cette série de fonctions.

b) Prouver que

$$(id_\mathrm{E} - \lambda \mathrm{A}_\alpha) g = f$$

c) En déduire que, pour tout nombre complexe λ non nul, l'opérateur $id_\mathrm{E} - \lambda \mathrm{A}_\alpha$ est inversible et que :

$$(id_\mathrm{E} - \lambda \mathrm{A}_\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \mathrm{A}_\alpha^n$$

où $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \mathrm{A}_\alpha^n$ désigne l'application $f \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \mathrm{A}_\alpha^n (f)$.

IV.C - Pour tout entier naturel n, on note e_n la fonction monômiale $t \mapsto t^n$.

IV.C.1) Soit n un entier naturel.

a) Calculer $\mathrm{A}_\alpha e_n$.

b) En déduire que :

$$(\mathrm{A}_{1-\alpha} \circ \mathrm{A}_\alpha) e_n = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \frac{e_{n+1}}{n+1}$$

IV.C.2) Ce résultat suggère d'introduire l'opérateur P défini sur E par la formule suivante :

$$\forall x \in [0,1] \quad , \quad \mathrm{P}f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, avec cette notation, pour tout entier naturel n,

$$(\mathrm{A}_{1-\alpha} \circ \mathrm{A}_\alpha) e_n = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \mathrm{P} e_n$$

Établir que, pour toute fonction polynômiale ψ,

$$(\mathrm{A}_{1-\alpha} \circ \mathrm{A}_\alpha) \psi = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \mathrm{P}\psi$$

IV.C.3 Formule d'inversion d'Abel.

a) Montrer que l'endomorphisme P est un endomorphisme continu de E tel que :

$$|||\mathrm{P}||| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \left\| \mathrm{P}f \right\| = 1$$

b) On pose $\mathrm{B}_\alpha = \mathrm{A}_{1-\alpha} \circ \mathrm{A}_\alpha$. Montrer que :

$$\mathrm{B}_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \mathrm{P}$$

c) Soit D l'opérateur qui à toute application continûment dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ associe sa dérivée.

Montrer que $\mathrm{D} \circ \mathrm{B}_\alpha$ est bien défini et que :

$$\mathrm{D} \circ \mathrm{B}_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} id_\mathrm{E}$$

d) En déduire que l'opérateur A_α est injectif.