PROBLÈME : Suites convexes et quasi-convexes (d'après CENTRALE 1979)

À toute suite de nombres complexes $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on associe les suites définie sur $\mathbb{N}^*$ par les relations

$$b_n = a_{n-1} - a_n \qquad c_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad d_n = a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n.$$

— On dit que (a_n) est <u>à variations bornées</u> si la série $\sum b_n$ est absolument convergente.
— On dit que (a_n) est <u>quasi-convexe</u> si la série $\sum n d_n$ est absolument convergente.
— On dit que (a_n) est <u>convexe</u> si elle est à valeurs réelles et si le réel d_n est positif ou nul pour tout $n \geqslant 1$.

On admettra (sans démonstration), que la série $\sum \frac{1}{n\ln n}$ est une série divergente (série de Bertrand).

PRÉLIMINAIRES

0.1 Montrer que, si (a_n) est à variations bornées alors (a_n) est convergente.

0.2 Prouver l'égalité, valable pour tout entier N :

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n\, d_n = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} b_n - \mathrm{N}\, b_{\mathrm{N}+1}.$$

PARTIE I

Dans cette partie, (a_n) est une suite réelle.

I.1 Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur la suite (b_n), pour que la suite (a_n) soit convexe.

I.2 On suppose dans cette question, qu'il existe une fonction réelle f, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, à dérivée seconde positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $a_n = f(n)$ pour tout n.
Démontrer que (a_n) est convexe.

I.3 Déterminer toutes les suites convexes (a_n) telles que la suite a' définie par les relations $a'_n = -a_n$ soient également convexes.

I.4 Déterminer les valeurs du réel strictement positif α telles que la suite de terme général $a_n = n^\alpha$ soit convexe.

I.5 Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier relatif tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. On adopte, dans cette question, $a_n = \lfloor n^\alpha \rfloor$ où α est un réel strictement positif.

a) La suite (a_n) est-elle convexe pour $\alpha = \frac{3}{2}$?
(On pourra examiner le cas $n = 9$ en s'aidant d'une calculatrice ; toutefois, le raisonnement figurant sur la copie devra exclure toute valeur approchée et ne s'appuyer que sur des inégalités entre entiers.)

b) Démontrer que la suite (a_n) est convexe pour $\alpha \geqslant 2$.

PARTIE II

Dans cette partie, (a_n) est une suite réelle, convexe et bornée.
On notera A un majorant des réels $|a_n|$.

II.1 Démontrer que la suite (b_n) est convergente. Déterminer sa limite.

II.2 Démontrer que la suite (a_n) est convergente.

II.3 Soient n et p deux entiers de $\mathbb{N}^*$ tels que $n \geqslant 2p$; démontrer les relations

$$0 \leqslant n\, b_n \leqslant 2(a_p - a_n).$$

En déduire les limites des suites $(n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n\, b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

II.4 Démontrer l'existence et l'égalité des deux membres de la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,d_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

PARTIE III

Dans cette partie, (a_n) est une suite quasi-convexe et bornée.
On notera A un majorant des réels $|a_n|$.

III.1 Démontrer, pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant 2$, la relation

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} |b_n| \leqslant |a_0 - a_{\mathrm{N}}| + 2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} n\,|d_n|.$$

En déduire que (a_n) est à variations bornées.

Indication :

On remarquera qu'on a la relation suivante (qui se démontre en développant simplement le second membre), valable pour tout $n \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$:

$$b_n = \frac{1}{\mathrm{N}}(b_1 + \cdots + b_{\mathrm{N}}) - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{\mathrm{N}}(b_p - b_{p+1}) + \sum_{p=n}^{\mathrm{N}-1} \frac{\mathrm{N}-p}{\mathrm{N}}(b_p - b_{p+1}),$$

et on montrera que l'on peut en déduire la formule suivante :

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} |b_n| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} b_n\right| + 2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} n\,|b_n - b_{n+1}|.$$

III.2 Démontrer (en justifiant l'existence des sommes des séries concernées) les relations suivantes

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right| + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\,|d_n|.$$

III.3 Démontrer l'existence et l'égalité des deux membres de la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,d_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

PARTIE IV

Dans cette partie, (a_n) est une suite complexe.

IV.1 Démontrer, pour n et N entiers supérieurs ou égaux à 1, les relations

$$c_n - c_{n+1} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \sum_{m=1}^{n} m(a_m - a_{m+1})$$

et

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} |c_n - c_{n+1}| \leqslant \sum_{m=1}^{\mathrm{N}} |a_m - a_{m+1}|.$$

IV.2 On suppose, dans cette question, que (a_n) est à variations bornées. Calculer, pour n entier supérieur ou égal à 2, le nombre $c_{n-1} + c_{n+1} - 2c_n$ en fonction de $c_{n-1} - c_n$ et $a_{n+1} - a_n$.

En déduire que (c_n) est quasi-convexe et que l'on a la relation

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n\,|c_{n-1} + c_{n+1} - 2c_n| \leqslant 3\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{n+1} - a_n|.$$

IV.3 On suppose, dans cette question, que (a_n) est bornée et que (c_n) est quasi-convexe. Démontrer, en utilisant le résultat de la question III.1, que (a_n) est à variations bornées et convergente.

IV.4 On pose, dans cette question, $a_0 = 0$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ si n n'est pas une puissance de 2, $b_n = \dfrac{1}{n}$ si n est une puissance de 2.

Démontrer que ceci définit une suite (a_n) vérifiant les propriétés supposées en IV.2 et IV.3.

Peut-on écrire encore, dans ce cas, la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n d_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ ?}$$

IV.5 On suppose, dans cette question, que (a_n) est à variations bornées. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la série $\sum \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ est absolument convergente ;

(ii) la série $\sum \dfrac{c_n}{n+1}$ est absolument convergente.

PARTIE V

Dans cette partie, (a_n) est une suite complexe.

V.1 Démontrer, pour tout entier $p \geqslant 1$, les relations

$$\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m} \leqslant 1 + \ln p$$

et

$$\Big| |a_p \ln p - a_{p+1} \ln(p+1)| - |a_p - a_{p+1}| \ln p \Big| \leqslant \frac{|a_{p+1}|}{p}.$$

V.2 Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la suite $(a_n \ln n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et la série $\sum (a_n - a_{n+1}) \ln n$ est absolument convergente ;

(ii) les séries $\sum \dfrac{a_n}{n}$ et $\sum \big(a_n \ln n - a_{n+1} \ln(n+1)\big)$ sont absolument convergentes.

V.3 Donner un exemple simple de suite non nulle (a_n) satisfaisant aux deux conditions ci-dessus.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆