PSI* 11-12

D.M n°1 pour le 16/09

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve

Le but de ce problème est de mettre en évidence, dans un cas particulier, une méthode de calcul approché de la plus grande racine positive d'une équation algébrique, ainsi que d'estimer la qualité de cette approximation.

Les questions demandant une suite d'instructions rédigées en ~~Pascal~~ MAPLE sont destinées à mettre en évidence le fonctionnement des algorithmes. ***On ne demande pas de rédiger les parties déclaratives des variables ni les procédures d'entrées-sorties***

PARTIE I

On considère l'équation :

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

1. Montrer qu'elle admet 3 racines réelles distinctes vérifiant :

$$-2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$$

2. Justifier la relation : $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, puis en déduire les inégalités : $|\, x_2 \,|<|\, x_1 \,|<|\, x_3 \,|$

3. On considère l'ensemble E des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout n entier naturel, la relation :

$$u_{n+3} - u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$$

3.a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
3.b. Soit ϕ l'application de E dans $\mathbb{R}^3$ qui à un élément u de E associe (u_0, u_1, u_2). Montrer que ϕ est un isomorphisme et en déduire que E est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.
3.c. Montrer que les suites de termes généraux respectifs x_1^n, x_2^n et x_3^n sont des éléments de E.

4. On considère le système (S) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 x_1 & + & \lambda_2 x_2 & + & \lambda_3 x_3 & = & 0 \\ \lambda_1 x_1^2 & + & \lambda_2 x_2^2 & + & \lambda_3 x_3^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

4.a. Montrer qu'il admet une solution unique $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et déterminer λ_3.
Vérifier en particulier qu'il est non nul.
4.b. Expliciter $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ en fonction de (x_1, x_2, x_3).

Tournez la page S.V.P

5. On note a l'unique suite élément de E telle que :

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1$$

5.a. Montrer que la suite a est croissante et que, pour tout n supérieur ou égal à 2, a_n est strictement positif.
5.b. Montrer qu'il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que , pour tout n entier naturel, on ait :

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n$$

5.c. On pose, pour $n \geq 2$:

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Montrer que la suite b ainsi définie converge vers x_3.

6. *Application numérique*
6.a. Ecrire une suite d'instructions rédigées en ~~Pascal~~ MAPLE permettant de calculer a_n et b_n lorsque n varie entre 2 et 100.
6.b Donner les valeurs approchées de $b_2, ..., b_{10}$ fournies par la calculatrice.

PARTIE II

Dans cette partie, on se propose d'estimer la rapidité de convergence de la suite b et de l'accélérer.

A. Une première estimation de la rapidité de convergence

On pose, pour tout n entier naturel :

$$\varepsilon_n = b_n - x_3$$

1. Justifier, lorsque n tend vers l'infini :

$$\varepsilon_n \sim (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n$$

2. En déduire l'existence d'une constante K telle que, pour tout n entier naturel, on ait :

$$| b_n - x_3 | \leq K \times \left|\frac{x_1}{x_3}\right|^n$$

B. Utilisation des suites dominantes.

On rappelle que si u_n et v_n sont les termes respectifs d'ordre n de deux suites réelles u et v, on dit que "v domine u" s'il existe un indice p et une constante M tels que, pour tout $n \geq p$:

$$|u_n| \leq M|v_n|$$

On notera : $u_n = O(v_n)$
On s'intéressera plus particulièrement ici à des suites définies par : $v_n = \beta^n$, où β est un réel strictement positif.

1. Dans cette question, on suppose que β est un réel fixé strictement positif. On note $E(\beta)$ l'ensemble des suites réelles dominées par la suite de terme général β^n. Les résultats démontrés pourront être utilisés dans les questions ultérieures.

1.a. Montrer que $E(\beta)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

1.b. Prouver que, lorsque β est strictement inférieur à 1, tout élément de $E(\beta)$ converge vers 0.

1.c. Montrer que $E(\beta)$ contient toutes les suites de terme général λ^n, avec : $0 < \lambda \leq \beta$.

1.d. Démontrer que si u est élément de $E(\beta)$ et si w est une suite dont tous les termes sont non nuls et qui converge vers une limite finie et non nulle, alors les suites de termes généraux respectifs $u_n w_n$ et u_n/w_n sont des éléments de $E(\beta)$.

2.a. Montrer que l'on peut écrire :

$$\varepsilon_n = \frac{\left(\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n(x_1 - x_3)\right] + \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n(x_2 - x_3)\right]\right)}{1 + \alpha_n}$$

où α_n est le terme général d'une suite qui converge vers 0 et que l'on précisera.

2.b. On pose :

$$\beta = \max\left\{\left|\frac{x_2}{x_3}\right|, \left|\frac{x_2 x_1}{x_3^2}\right|, \left|\frac{x_1}{x_3}\right|^2\right\}$$

Vérifier l'inégalité :

$$\beta < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|$$

Montrer que l'on peut écrire :

$$(1) \quad b_n = x_3 + \gamma\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)$$

où on a posé :

$$\gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}(x_1 - x_3)$$

C. Accélération de la convergence

Dans cette partie, on se propose d'utiliser la relation (1) pour trouver une suite qui converge vers x_3 plus rapidement que la suite b.

1. On pose, pour $n \geq 3$:

$$c_n = \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n - b_{n-1}}$$

Après avoir formé : $c_n - \frac{x_1}{x_3}$, justifier :

$$(2) \quad c_n = \frac{x_1}{x_3} + O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]$$

2. On définit la suite d par son terme général, pour $n \geq 3$:

$$d_n = \frac{b_{n+1} - c_n b_n}{1 - c_n}$$

Tournez la page S.V.P

Montrer que l'on a :

$$(3) \quad d_n = x_3 + O(\beta^n)$$

On pourra pour cela considérer la quantité : $d_n - x_3$

3. En quoi peut-on dire que "la convergence de la suite a été accélérée" ?

D. Application numérique

1. Ecrire une suite d'instructions rédigées en ~~Pascal~~ MAPLE permettant de calculer d_{50}.

2. A l'aide de la calculatrice déterminer une valeur approchée de $d_3, ..., d_{10}$.