DM N°1 (pour le 20/09/2013)

Autour d'un théorème de Tchebychev concernant la répartition des nombres premiers.

Introduction

Étant donné un entier naturel n, on considère $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers compris entre 0 et n. Ce sujet s'intéresse au comportement de la suite $(\pi(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Il est composé de deux grandes parties A et B.

La partie A vise à établir l'encadrement suivant :

$$(\ln 2)\frac{n}{\ln n} \leqslant \pi(n) \leqslant \mathrm{e}\frac{n}{\ln n}$$

valable pour tout $n \geqslant 3$. Elle est composée de deux sous-parties, A.I et A.II, consacrées respectivement à la minoration et à la majoration annoncées.

Ce genre d'encadrement suggère l'existence d'un lien asymptotique fort entre les suites $\big(\pi(n)\big)_n$ et $\left(\frac{n}{\ln n}\right)_n$. La partie B s'intéresse à cette question puisque son objectif principal est de montrer le résultat suivant :

Théorème. (Tchebychev[1]) *S'il existe un réel $c>0$ tel que $\pi(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} c\,\frac{n}{\ln n}$ alors nécessairement $c=1$.*

Elle est composée de quatre sous-parties B.I, B.II, B.III et B.IV. C'est dans la partie B.III qu'on établit le théorème annoncé. La preuve qu'on en propose repose sur l'étude du comportement asymptotique de la suite $\left(\sum\limits_{p \text{ premier} \leqslant n} \frac{1}{p}\right)_n$. Cette étude est réalisée au début de la partie B.III. Les parties B.I et B.II sont consacrées à l'établissement de formules importantes pour la suite. Dans la partie B.I on établit une formule due à Legendre[2] qui donne l'expression de la valuation p-adique de $n!$. Dans la partie B.II on démontre un théorème de Mertens[3] qui précise le comportement asymptotique de la suite $\left(\sum\limits_{p \text{ premier} \leqslant n} \frac{\ln p}{p}\right)_n$. La partie B.IV est une application de la formule asymptotique trouvée dans la partie B.III. On y étudie la densité de l'ensemble des entiers possédant de grands facteurs premiers.

À la fin du sujet, une note documentaire met en perspective, d'un point de vue historique, le théorème de Tchebychev démontré ici. Sa lecture n'est pas essentielle au bon traitement du sujet.

Les parties de ce problème ne sont pas indépendantes entre elles.

NOTATIONS ET RAPPELS :

- On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
- Si E est un ensemble, on note #E le cardinal de cet ensemble, c'est-à-dire le nombre d'éléments de E.
- Si x est un nombre réel, on note $\lfloor x\rfloor$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x ; autrement dit, $\lfloor x\rfloor$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant :

$$\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$$

- On rappelle que, si a et b sont deux nombres entiers tels que $0 \leqslant b \leqslant a$, le coefficient binomial $\binom{a}{b}$ est égal à $\frac{a!}{(a-b)!b!}$.

1. Pafnouti Lvovitch Tchebychev, mathématicien russe, Okatovo 1821 – Saint-Pétersbourg 1894.
2. Adrien-Marie Legendre, mathématicien français, Paris 1752 – Auteuil 1833.
3. Franz Mertens, mathématicien autrichien, 1840 – 1927.

- Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ désignent deux suites numériques, on notera $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ou plus simplement $u_n \sim v_n$, pour dire que ces suites sont *équivalentes*. On notera $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ pour dire que la suite $(u_n)_n$ est *négligeable* devant la suite $(v_n)_n$ et enfin on notera $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ pour dire que la suite $(u_n)_n$ est *dominée* par la suite $(v_n)_n$, c'est-à-dire qu'il existe un réel c et un entier n_0 tels que, pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $|u_n| \leqslant c\,|v_n|$.

- Pour tout entier naturel n, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers compris dans l'intervalle $[\![0, n]\!]$; ainsi, on a $\pi(0) = \pi(1) = 0$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$ etc.

  Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\delta(n) = \pi(n) - \pi(n-1)$, de sorte que si l'on pose $\delta(0) = 0$, on voit que δ est la fonction caractéristique de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire $\delta(n) = 1$ si n est premier et $\delta(n) = 0$ sinon).

- **Dans tout le texte la lettre p désignera toujours et exclusivement un nombre premier** , ceci y compris lorsque la lettre p sera utilisée comme symbole d'indice d'une somme ou d'un produit. Par exemple, la notation $\displaystyle\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p}$ désigne la somme des inverses des nombres premiers inférieurs ou égaux au nombre réel x.

- Étant donnés un entier $n \geqslant 1$ et un nombre premier p, on appelle *valuation p-adique* de n l'entier noté $v_p(n)$ et égal à l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n. Par exemple, si l'on prend $n = 350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$ on a $v_2(350) = 1$, $v_3(350) = 0$, $v_5(350) = 2$, $v_7(350) = 1$ et $v_p(350) = 0$ pour tout nombre premier $p \geqslant 11$.

  On admettra les propriétés (élémentaires) suivantes :

  – $v_p(n)$ est l'unique entier k tel que p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n.

  – Pour tout $n \geqslant 1$ fixé, la suite $\big(v_p(n)\big)_{p\in\mathcal{P}}$ est nulle à partir d'un certain rang, de sorte que l'on peut écrire $n = \displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(n)}$, ce produit pouvant être considéré comme un produit fini. Cette écriture est la décomposition de n en facteurs premiers.

  – Pour tous n, m entiers naturels non nuls et tout $p \in \mathcal{P}$, on a
  $$v_p(mn) = v_p(n) + v_p(m).$$

  – Pour tous n, m entiers naturels non nuls et tout $p \in \mathcal{P}$, on a
  $$v_p\big(\mathrm{pgcd}(m,n)\big) = \min\big(v_p(m), v_p(n)\big) \quad \text{et} \quad v_p\big(\mathrm{ppcm}(m,n)\big) = \max\big(v_p(m), v_p(n)\big).$$

  Aucune preuve de ces quatre résultats n'est demandée.

PARTIE A : Une estimation à la Tchebychev

I. Une minoration de la fonction π

On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'entier $\Delta_n = \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n)$. Dans cette partie, nous allons établir une minoration de Δ_n puis en déduire une minoration de $\pi(n)$.

On considère $a, b \in \mathbb{N}$ vérifiant $1 \leqslant b \leqslant a$ et l'on pose :
$$\mathrm{I}(b,a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}\,\mathrm{d}x.$$

A.I.1.

A.I.1.a. Expliciter $\mathrm{I}(1,a)$ en fonction de a.

A.I.1.b. Montrer que si $b < a$ alors $\mathrm{I}(b+1,a) = \dfrac{b}{a-b}\mathrm{I}(b,a)$.

A.I.1.c. En déduire que $\mathrm{I}(b,a) = \dfrac{1}{b\binom{a}{b}}$.

A.I.2. On se propose dans cette question de donner une autre méthode pour calculer $\mathrm{I}(b,a)$. On considère un réel $y \in [0,1[$.

A.I.2.a. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1} y^{k-1}\mathrm{I}(k,a).$$

A.I.2.b. En déduire que $\mathrm{I}(b,a) = \dfrac{1}{b\binom{a}{b}} = \dfrac{1}{a\binom{a-1}{b-1}}$.

A.I.3.

A.I.3.a. Montrer que $\mathrm{I}(b,a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}$.

A.I.3.b. En déduire que l'entier $b\binom{a}{b}$ divise l'entier Δ_a.

A.I.4. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

A.I.4.a. Montrer que les entiers $n\binom{2n}{n}$ et $(2n+1)\binom{2n}{n}$ divisent l'entier Δ_{2n+1}.

(*Indication :* on remarquera que, pour tout $k \geqslant 1$, Δ_k divise Δ_{k+1}).

A.I.4.b. En déduire que l'entier $n(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}.

(*Indication :* on remarquera que les entiers n et $2n+1$ sont toujours premiers entre eux.)

A.I.4.c. Montrer que pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$ on a l'inégalité : $\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}$.

A.I.4.d. En déduire que $(2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant 4^n$.

(*Indication :* on développera l'égalité $(1+1)^{2n} = 4^n$.)

A.I.4.e. En déduire que $\Delta_{2n+1} \geqslant n4^n$.

A.I.4.f. Montrer que si $n \geqslant 9$ alors $\Delta_n \geqslant 2^n$ et vérifier que cette inégalité est encore vraie pour $n=7$ et $n=8$.

A.I.5. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

A.I.5.a. Soit $p \in \mathcal{P}$; montrer que $p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant n$.

(*Indication :* on commencera par exprimer $v_p(\Delta_n)$ en fonction de $v_p(1), \dots, v_p(n)$.)

A.I.5.b. Montrer que $\Delta_n = \displaystyle\prod_{p \leqslant n} p^{v_p(\Delta_n)}$.

A.I.5.c. En déduire que $\Delta_n \leqslant n^{\pi(n)}$.

A.I.6.

A.I.6.a. Montrer que pour tout $n \geqslant 7$ on a

$$\pi(n) \geqslant (\ln 2)\frac{n}{\ln n}.$$

A.I.6.b. Pour quels entiers $n \in \{2,3,4,5,6\}$ l'inégalité de la question précédente est-elle encore vraie ?

II. Une majoration de la fonction π

A.II.1. On cherche dans cette question à majorer simplement le produit $\displaystyle\prod_{p \leqslant n} p$ en fonction de l'entier $n \geqslant 1$.

A.II.1.a. Soient a et b deux entiers tels que $0 < \frac{b}{2} \leqslant a < b$. Montrer que le produit $\prod_{a<p\leqslant b} p$ divise l'entier $\binom{b}{a}$ (le produit considéré est supposé être égal à 1 dans le cas où il n'y aurait pas de nombre premier dans l'intervalle $]a, b]$).

A.II.1.b. En déduire que, pour tout $m \geqslant 1$, le produit $\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p$ divise l'entier $\binom{2m+1}{m+1}$.

A.II.1.c. Comparer, pour $m \geqslant 1$, les entiers $\binom{2m+1}{m}$ et $\binom{2m+1}{m+1}$.

A.II.1.d. En déduire que pour tout entier $m \geqslant 1$ on a $\binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$.

(*Indication :* on développera la quantité $(1+1)^{2m+1}$).

A.II.1.e. Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$ on a $\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant 4^m$.

A.II.1.f. Prouver finalement que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a

$$\prod_{p\leqslant n} p \leqslant 4^n.$$

(*Indication :* on pourra montrer par récurrence, pour $n \geqslant 1$, la propriété (P_n) : pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$ on a $\prod_{p\leqslant k} p \leqslant 4^k$.)

A.II.2.

A.II.2.a. Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$ on a $m! \geqslant \left(\frac{m}{\mathrm{e}}\right)^m$.

(*Indication :* on pourra étudier le sens de variation de la suite de terme général $u_m = \dfrac{m!\mathrm{e}^m}{m^m}$.
Les 5/2 pourront aussi utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.)

A.II.2.b. Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $\pi(n)! \leqslant 4^n$ et que par suite, on a

$$\pi(n) \ln \pi(n) - \pi(n) \leqslant n \ln 4.$$

A.II.3. On souhaite montrer, à partir du résultat précédent, que pour tout $n \geqslant 3$ on a

$$\pi(n) \leqslant \mathrm{e}\frac{n}{\ln n}.$$

Pour cela on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 3$ tel que $\pi(n_0) > \mathrm{e}\dfrac{n_0}{\ln n_0}$.

A.II.3.a. Montrer que la fonction $x \mapsto x \ln x - x$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. En déduire que

$$\frac{\mathrm{e} - \ln 4}{\mathrm{e}} < \frac{\ln \ln n_0}{\ln n_0}.$$

A.II.3.b. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est majorée par e^{-1} sur $[1, +\infty[$. Conclure.

PARTIE B : Autour d'un théorème de Mertens

I. Une formule de Legendre sur la valuation p-adique de $n!$

On considère un entier $n \geqslant 2$ et un nombre premier p. Pour tout entier $k \geqslant 0$, on considère les sous-ensembles finis U_k, V_k et Ω_k de $\mathbb{N}$ définis par

$$\mathrm{U}_k = \{a \in [\![1, n]\!] \text{ tq } p^k \text{ divise } a\}$$

$$\mathrm{V}_k = \{a \in [\![1, n]\!] \text{ tq } p^k \text{ ne divise pas } a\}$$

$$\Omega_k = \{a \in [\![1, n]\!] \text{ tq } v_p(a) = k\}$$

B.I.1. Justifier qu'il existe un plus petit entier $k_0 \geqslant 0$ tel que $n < p^{k_0}$. Montrer que $k_0 \geqslant 1$ et expliciter k_0 en fonction de n et p.

B.I.2.

B.I.2.a. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, k_0 - 1]\!]$, l'ensemble U_{k+1} est strictement inclus dans U_k et que pour $k \geqslant k_0$ on a $\mathrm{U}_k = \emptyset$.

B.I.2.b. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, k_0 - 1]\!]$, l'ensemble V_k est strictement inclus dans V_{k+1} et que pour $k \geqslant k_0$ on a $\mathrm{V}_k = [\![1, n]\!]$.

B.I.2.c. Prouver que la famille de parties $\{\Omega_0, \ldots, \Omega_{k_0-1}\}$ forme une partition de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

B.I.3.

B.I.3.a. Pour tout $k \geqslant 0$, établir que $\Omega_k = \mathrm{U}_k \cap \mathrm{V}_{k+1}$.

B.I.3.b. Calculer, pour tout $k \geqslant 0$, $\#\mathrm{U}_k$ et $\#\mathrm{V}_k$ puis $\#\Omega_k$ en fonction de n, p.

B.I.4. Montrer que $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} k \# \Omega_k$ et en déduire que

$$v_p(n!) = \sum_{k \geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

(formule de Legendre).

II. Un théorème de Mertens

Dans toute cette partie II, on considère un entier $n \geqslant 2$.

B.II.1. Prouver que pour tout $p \in \mathcal{P}$ on a

$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leqslant \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}.$$

(*Indication :* on pourra utiliser l'encadrement $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$ valable pour tout réel x et la formule de Legendre.)

B.II.2. En déduire que

$$n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} - \sum_{p \leqslant n} \ln p < \ln n! \leqslant n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p(p-1)}.$$

(*Indication :* on pourra commencer par montrer que $n! = \displaystyle\prod_{p \leqslant n} p^{v_p(n!)}$.)

B.II.3. Dans cette question on établit plusieurs majorations techniques utiles aux deux questions suivantes.

B.II.3.a. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{r}{2^r}$ et prouver que $\displaystyle\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^r} = 2$.

(*Indication :* on pourra s'intéresser à la série entière $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{x^k}{2^k}$ ainsi qu'à sa série dérivée.

Les 3/2 pourront admettre la dernière égalité.)

B.II.3.b. Calculer pour tout entier $r \geqslant 1$ la somme finie $\displaystyle\sum_{2^{r-1} < m \leqslant 2^r} \frac{1}{m(m-1)}$. En déduire que si l'on pose $\mathrm{U}_r = \displaystyle\sum_{2^{r-1} < m \leqslant 2^r} \frac{\ln m}{m(m-1)}$ alors on a $\mathrm{U}_r \leqslant \dfrac{r}{2^r} \ln 2$.

B.II.3.c. Montrer que la série $\sum \mathrm{U}_r$ converge. Donner un majorant de $\displaystyle\sum_{r=1}^{+\infty} \mathrm{U}_r$.

B.II.3.d. En déduire que la série $\displaystyle\sum \frac{\ln m}{m(m-1)}$ est convergente et que l'on a :

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leqslant \ln 4.$$

B.II.3.e. Montrer que l'on a : $1-\frac{1}{2n} \leqslant n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1$ et $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{2n}$.

(*Indication :* on commencera par montrer que pour tout réel $u \geqslant 0$ on a les inégalités $u-\frac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$.)

B.II.3.f. En déduire, par récurrence sur n, qu'il existe un réel $\theta_n \in [0,1]$ tel que :

$$\ln n! = n\ln n - n + 1 + \theta_n \ln n.$$

B.II.4. Prouver, en utilisant les résultats des questions B.II.2 et B.II.3, que :

$$\ln n - (1+\ln 4) < \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p}$$

B.II.5. De même, en utilisant les questions B.II.2, B.II.3 et A.II.1.f, montrer que :

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p} < \ln n + \ln 4.$$

En déduire que

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + \mathrm{O}(1)$$

(théorème de Mertens).

III. Le comportement asymptotique de $\displaystyle\left(\sum_{p\leqslant n} \frac{1}{p}\right)_n$

B.III.1. Dans cette question on établit des résultats préliminaires utiles pour la suite.

B.III.1.a. Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$ est convergente, que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln n}$ est divergente et qu'on a

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} = \ln\ln n + \mathrm{O}(1)$$

(*Indication :* on utilisera une méthode de comparaison série-intégrale.)

B.III.1.b. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ définie par $\displaystyle u_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} - \ln\ln n$. Montrer que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n^2\ln n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right).$$

B.III.1.c. En déduire qu'il existe un réel ℓ tel que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} = \ln\ln n + \ell + \mathrm{o}(1).$$

B.III.2. On note $(\psi(n))_{n\geqslant 2}$ la suite définie par $\displaystyle\psi(n) = \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p}$. On considère un entier $n \geqslant 3$.

B.III.2.a. Montrer que $\displaystyle\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}=\sum_{k=2}^{n-1}\psi(k)\frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\ln k.\ln(k+1)}+\frac{\psi(n)}{\ln n}\cdot$

(*Indication :* on pourra remarquer que $\displaystyle\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}=\sum_{k=2}^{n}\frac{\delta(k)\ln k}{k}\cdot\frac{1}{\ln k}$ où δ est la fonction caractéristique de $\mathcal{P}$, puis utiliser la remarque suivante après l'avoir démontrée (ce procédé s'appelle une *transformation d'Abel*) :

si $(a_n)_{n\geqslant1}$, $(b_n)_{n\geqslant1}$ sont deux suites numériques et si pour $n\geqslant1$ on pose $\mathrm{A}_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$, alors pour tout $\mathrm{N}\geqslant2$, on a

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}a_n b_n=\mathrm{A}_\mathrm{N} b_\mathrm{N}+\sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1}\mathrm{A}_n(b_n-b_{n+1}).)$$

B.III.2.b. Prouver, en utilisant le théorème de Mertens, que :

$$\psi(k)\frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\ln k\ln(k+1)}=\frac{1}{k\ln k}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{k\ln^2 k}\right).$$

(*Indication :* on commencera par écrire la fraction $\dfrac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\ln k\ln(k+1)}$ sous la forme $\dfrac{1}{\ln k}\dfrac{t(k)}{1+t(k)}$, où $t(k)$ est une suite qu'on déterminera.

On montrera ensuite que $\dfrac{t(k)}{1+t(k)}=\dfrac{1}{k\ln k}-\dfrac{1}{2k^2\ln k}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{k^2\ln k}\right)$.)

B.III.3. Déduire de ce qui précède qu'il existe une constante $\lambda\in\mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}=\ln\ln n+\lambda+o(1).$$

B.III.4. Montrer que pour tout $n\geqslant2$ on a $\displaystyle\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi(k)}{k(k+1)}+\frac{\pi(n)}{n}$.

En déduire que s'il existe une constante réelle c telle que $\pi(n)\sim c\dfrac{n}{\ln n}n$ alors $c=1$ (théorème de Tchebychev).

IV. Une application à l'étude des entiers possédant de grands facteurs premiers

Étant donné un entier $n\geqslant2$, on note $\mathrm{P}^+(n)$ le plus grand facteur premier apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de n. Par exemple, $\mathrm{P}^+(50)=\mathrm{P}^+(2\cdot5^2)=5$. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble A constitué des entiers $n\geqslant2$ vérifiant $\mathrm{P}^+(n)>\sqrt{n}$ (c'est ce qu'on entend par *entiers possédant de grands facteurs premiers* dans le titre de cette partie). L'objectif de cette partie est de montrer que l'ensemble A possède une densité valant $\ln2$. En d'autres termes, si pour un réel $x\geqslant2$ on pose $\mathrm{A}(x)=\mathrm{A}\cap[0,x]$ et $a(x)=\#\mathrm{A}(x)$ le cardinal de $\mathrm{A}(x)$, nous allons montrer que la suite $\left(\dfrac{a(n)}{n}\right)_n$ possède une limite (on dira alors que A possède une *densité*) et que cette limite vaut $\ln2$ (qui sera donc appelée la *densité* de A) . Ce résultat signifiera que, « moralement », il y a une proportion de $\ln2\approx0,69$ entiers dans $\mathbb{N}$ qui possèdent de grands facteurs premiers.

B.IV.1. En utilisant la question B.III.3 montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{\sqrt{n}<p\leqslant n}\frac{1}{p}\right)_n$ possède une limite et donner cette limite.

B.IV.2. Soit $x\geqslant2$ un réel.

B.IV.2.a. Soient $p\in\mathcal{P}$, $m\in\mathbb{N}^*$ et $n=mp$. Montrer que

$$(p=\mathrm{P}^+(n)\ \text{ et }\ n\in\mathrm{A}(x))\iff m<p\leqslant x/m.$$

B.IV.2.b. Soient $p, p' \in \mathcal{P}$ et $m,\ m' \in \mathbb{N}^*$ tels que $m < p \leqslant x/m$ et $m' < p' \leqslant x/m'$. Montrer que

$$mp = m'p' \iff (p = p' \text{ et } m = m')\,.$$

B.IV.2.c. En déduire que les entiers de la forme mp avec $p \in \mathcal{P},\ m \in \mathbb{N}^*$, et vérifiant $m < p \leqslant x/m$ décrivent de manière biunivoque l'ensemble $\mathrm{A}(x)$.

B.IV.2.d. Prouver finalement que

$$a(x) = \sum_{p \leqslant x} \min\left(p-1,\ \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor\right).$$

B.IV.3. Soit $x \geqslant 1$ un réel.

B.IV.3.a. Montrer que pour tout nombre premier p, on a l'équivalence

$$p - 1 \leqslant \lfloor x/p \rfloor \iff p \leqslant \varphi(x)$$

où $\varphi(x) = \dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$.

B.IV.3.b. Montrer que $\sqrt{x} < \varphi(x) < \sqrt{x} + 1$.

B.IV.3.c. En déduire que $a(x) = \displaystyle\sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) + \sum_{\sqrt{x} < p \leqslant x} \lfloor x/p \rfloor$.

(*Indication :* on examinera le cas où il existe un nombre premier dans l'intervalle $\left]\sqrt{x},\ \varphi(x)\right]$ et le cas où il n'en existe pas.)

B.IV.3.d. En utilisant les encadrements obtenus dans la partie A, démontrer que

$$\sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) = \mathrm{o}(x).$$

B.IV.3.e. En utilisant la question B.IV.1 et les encadrements obtenus dans la partie A, montrer que $\displaystyle\sum_{\sqrt{x} < p \leqslant x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor = x \ln 2 + \mathrm{o}(x)$.

B.IV.3.f. En déduire que $a(x) = x \ln 2 + \mathrm{o}(x)$ et conclure.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Un peu d'histoire...

La notion de nombre premier est fondamentale en arithmétique des entiers. Très tôt dans l'histoire de l'esprit humain, en fait dès l'antiquité, on s'est intéressé à ces nombres. On savait depuis cette époque qu'ils étaient en nombre infini (théorème d'Euclide[4]). Au cours des âges on s'est intéressé en particulier à leur mystérieuse répartition. Il faudra réellement attendre le XIXe siècle pour qu'on dispose d'idées et d'outils suffisamment sophistiqués pour mieux comprendre cette problématique. Une première série d'idées importantes sur le sujet fut introduite par Tchebychev. En 1845 Bertrand[5] conjectura que pour tout entier $n \geqslant 2$ il existait toujours un nombre premier compris strictement entre n et $2n$. Il vérifia sa conjecture jusqu'au rang $n = 3000000$, mais il appartient à Tchebychev de la démontrer en 1851. Pour ce faire il entreprit de trouver des encadrements (qu'on appelle maintenant encadrements à la Tchebychev) de la fonction $\pi(n)$. Ces encadrements sont de la forme

$$\alpha\frac{n}{\ln n} < \pi(n) < \beta\frac{n}{\ln n}$$

pour $n \geqslant n_0$. L'objectif était de trouver des constantes α, β les plus proches possibles de 1 pour pouvoir conclure. Il y arrivera en montrant que cette inégalité est vraie pour $\alpha \approx 0,92$ et $\beta \approx 1,1$. Dans la partie A de ce sujet nous établissons un tel encadrement mais avec des constantes ($\alpha \approx 0,69$ et $\beta \approx 2,72$) trop éloignées de 1 pour pouvoir conclure sur la conjecture de Bertrand. Ceci est dû aux méthodes d'encadrement utilisées. À ce sujet, signalons que la méthode de minoration de $\pi(n)$ proposée en A.I repose sur la minoration effective de $\operatorname{ppcm}(1,\dots,n)$ par 2^n. Cette méthode de minoration est récente puisqu'elle date de 1982, elle est due à Nair. La majoration de $\pi(n)$ proposée en A.II repose sur la majoration effective de $\prod_{p\leqslant n} p$ par 4^n Cette méthode de majoration est due à Erdös[6] et date de 1939.

Les encadrements à la Tchebychev laissent suggérer l'existence d'un lien étroit, en termes de comportement asymptotique, entre $\pi(n)$ et $\frac{n}{\ln n}$. En fait, il avait longtemps été conjecturé, notamment par Gauss[7] et Legendre, que l'on avait l'équivalence (théorème des nombres premiers) : $\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$.

Il appartiendra à Hadamard[8] et de la Vallée-Poussin[9] de montrer (de manières indépendantes) ce résultat en 1896, confirmant ainsi la conjecture. Leur approche du problème fut la même et utilise l'analyse complexe. Elle repose sur l'étude sur la droite de partie réelle 1 de la fonction ζ de Riemann[10]. Pendant plusieurs années les experts, en particulier Hardy[11], ont pensé qu'une preuve du théorème des nombres premiers ne pouvait se dispenser de l'analyse complexe, tant il semblait que ce théorème était intrinsèquement lié aux propriétés de la fonction ζ. Pourtant en 1949 Erdös et Selberg[12] en proposèrent une preuve élémentaire (c'est-à-dire n'utilisant pas d'analyse complexe). Daboussi a proposé en 1984 une nouvelle preuve élémentaire de ce théorème. Les considérations utilisées dans ces preuves élémentaires sont du même acabit que celles présentées dans ce sujet (en plus sophistiquées bien sûr, vu l'ampleur du résultat démontré).

On peut considérer que le théorème de Tchebychev dont il est question dans ce sujet fut historiquement l'une des premières avancées significatives vers le théorème des nombres premiers.

4. Euclide, mathématicien probablement d'origine grecque, ≈ 330 av. J.C – ≈ 275 av. J.C.
5. Joseph Louis François Bertrand, mathématicien français, Paris 1822 – Paris 1900.
6. Pal Erdös, mathématicien hongrois, Budapest 1913 – Varsovie 1996.
7. Carl Friedrich Gauss, mathématicien allemand, Brunswick 1777 – Göttingen 1855.
8. Jacques Salomon Hadamard, mathématicien français, Paris 1865 – Auteuil 1963.
9. Charles Jean de La Vallée-Poussin, mathématicien belge, Louvain 1866 –Boitsfort 1962.
10. Georg Friedrich Bernhard Riemann, mathématicien allemand, Breselenz 1826 –Selasca 1866.
11. Godfrey Harold Hardy, mathématicien anglais, Cranleigh 1877 – Cambridge 1947.
12. Atle Selberg, mathématicien norvégien, Langesund 1917 – Princeton 2007.