CORRIGÉ DM N°3 (ESSEC 2008)

Première partie

1. **a)** On vérifie aisément que Δ est bien une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ (pour tout polynôme P, $\Delta(P)$ est bien un polynôme) et qu'elle est linéaire ($\forall (P,Q)\in\mathscr{P}^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\Delta(\lambda P+Q)=\lambda\Delta(P)+\Delta(Q)$). Donc :

$$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{P}.}$$

b) Soit $P\in\mathscr{P}$ de degré $r>0$. Il existe donc des réels $a_0,a_1,\dots,a_r$, avec $a_r\neq 0$, tels que $P=\sum_{k=0}^{r}a_kX^k$.

On aura alors $\Delta(P)=\sum_{k=0}^{r}a_k\left[(X+1)^k-X^k\right]=\sum_{k=1}^{r}a_k\left[(X+1)^k-X^k\right]$, les termes constant se simplifiant.

Or, d'après la formule du binôme, pour tout $k\geqslant 1$, $(X+1)^k-X^k=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^i$ est un polynôme de degré exactement $k-1$. Puisque $a_r\neq 0$:

$$\boxed{\text{le degré de } \Delta(P) \text{ est donc égal à } r-1.}$$

c)
- Il est clair que, si P est un polynôme constant, $\Delta(P)=0$, c'est-à-dire $P\in\operatorname{Ker}\Delta$;
- et, d'après la question précédente, si P n'est pas constant (donc de degré $r\geqslant 1$), $\Delta(P)$ ne peut être nul (car de degré $r-1$).

En conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Ker}\Delta \text{ est exactement l'ensemble des polynômes constants, } \mathscr{P}_0.}$$

2. **a)** On a vu en 1.a que, si P est de degré $d\geqslant 1$, alors $\Delta(P)$ est de degré $d-1$; et si P est de degré 0 (donc constant), alors $\Delta(P)=0$ est de degré $-\infty$.
Donc, si $P\in\mathscr{P}_r$, alors $\deg(P)\leqslant r$ et $\Delta(P)$ est de degré inférieur ou égal à $r-1$. Ainsi, $\Delta(\mathscr{P}_r)\subset\mathscr{P}_{r-1}\subset\mathscr{P}_r$; le sous-espace vectoriel $\mathscr{P}_r$ étant stable par Δ, on peut donc considérer l'endomorphisme Δ_r induit par Δ sur $\mathscr{P}_r$.

$$\boxed{\Delta_r \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{P}_r.}$$

b) De façon immédiate : $\operatorname{Ker}\Delta_r=\operatorname{Ker}\Delta\cap\mathscr{P}_r=\operatorname{Ker}\Delta=\mathscr{P}_0$.

c) On a déjà vu à la question 2.a que $\operatorname{Im}\Delta_r\subset\mathscr{P}_{r-1}$.

On vient aussi de voir que $\dim\operatorname{Ker}\Delta_r=\dim\mathscr{P}_0=1$; d'après le théorème du rang, on aura donc

$$\dim\operatorname{Im}\Delta_r=\dim\mathscr{P}_r-\dim\operatorname{Ker}\Delta_r=(r+1)-1=r=\dim\mathscr{P}_{r-1}.$$

Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im}\Delta_r$ et $\mathscr{P}_{r-1}$ étant inclus l'un dans l'autre et de même dimension, ils sont égaux :

$$\boxed{\operatorname{Im}\Delta_r=\mathscr{P}_{r-1}.}$$

d) Soit Q un polynôme quelconque.
- Si $Q=0$, on a $Q=\Delta(0)$;
- sinon, il existe $r\geqslant 1$ tel que $Q\in\mathscr{P}_{r-1}$. D'après la question précédente, Q appartient à l'image de Δ_r, c'est-à-dire qu'il existe $P\in\mathscr{P}_r$ tel que $Q=\Delta_r(P)=\Delta(P)$.

Dans les deux cas, on a prouvé l'existence d'un antécédent à Q par Δ, donc :

$$\boxed{\Delta \text{ est surjective de } \mathscr{P} \text{ dans } \mathscr{P}.}$$

3. Notons φ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout polynôme P associe sa valeur en 0, $P(0)$. φ est trivialement une forme linéaire sur $\mathscr{P}$. L'ensemble $\mathscr{E}$ est alors l'ensemble des polynômes P tels que $\varphi(P) = 0$ c'est-à-dire le noyau de φ.

Il en résulte que $\mathscr{E}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}$ (ce qui était admis par l'énoncé), mais surtout que c'est un *hyperplan* de $\mathscr{P}$. D'après le cours, toute droite vectorielle qui n'est pas incluse dans cet hyperplan en est un supplémentaire. C'est le cas de $\mathscr{P}_0$ (ensemble des polynômes constants), donc on a

$$\mathscr{P} = \mathscr{E} \oplus \mathscr{P}_0 .$$

(ce résultat pouvait aussi se démontrer de manière élémentaire en revenant à la définition de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires).

Le résultat demandé est donc une simple conséquence du fait que $\operatorname{Im}\Delta = \mathscr{P}$ (car Δ surjective) et du célèbre *théorème d'isomorphisme* que je rappelle ci-dessous :

> Soit u une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F.
>
> La restriction de u à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ est un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\operatorname{Im} u$.

4. **a)** Notons u la restriction de Δ à $\mathscr{E}$. On vient donc d'établir que $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ P & \longmapsto & \Delta(P) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La propriété de l'énoncé : « $N_n(0) = 0$ et $\Delta(N_n) = N_{n-1}$ » est équivalente à : « $N_n \in \mathscr{E}$ et $u(N_n) = N_{n-1}$ ». ou encore à « N_n est l'antécédent de N_{n-1} par u ».

La suite N_n est donc *la* suite définie par récurrence par

$$N_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* ,\ N_n = u^{-1}(N_{n-1}) .$$

b) Procédons par récurrence sur n.

- La formule de l'énoncé est vraie pour $n = 1$: en effet, par définition, N_1 est un polynôme de $\mathscr{E}$ tel que $\Delta(N_1) = N_0 = 1$. D'après les propriétés sur les degrés vues à la question 1, N_1 est nécessairement de degré 1 ; puisque $N_1(0) = 0$, il existe a réel tel que $N_1 = aX$. Enfin, la relation $N_1(X+1) - N_1(X) = 1$ implique $a = 1$.
  Donc $N_1 = X$, et la formule de l'énoncé est vraie au rang 1.

- Supposons dénontrée l'égalité au rang $n - 1 \geqslant 1$, c'est-à-dire $N_{n-1} = \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-2} (X - k)$.

  Posons alors $P_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$. Pour montrer que $N_n = P_n$, il suffit de démontrer, par unicité, que P_n appartient bien à $\mathscr{E}$ et que $\Delta P_n = N_{n-1}$:
  - Le fait que $P_n \in \mathscr{E}$ est immédiat ($P_n(0) = 0$).
  - En écrivant $P_n = \dfrac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$ on a

$$\begin{aligned} \Delta(P_n) = P_n(X+1) - P_n(X) &= \frac{(X+1)X(X-1)\dots(X-n+2)}{n!} - \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!} \\ &= \frac{X(X-1)\dots(X-n+2)}{n!} \underbrace{\big[(X+1) - (X-n+1)\big]}_{=n} \\ &= \frac{X(X-1)\dots(X-n+2)}{(n-1)!} = N_{n-1} \end{aligned}$$

  On a donc bien $N_n = P_n$, ce qui établit la formule à l'ordre n et achève la démonstration.

c)
- La famille de polynômes $(N_n)_{n \in [0,r]}$ est une famille de polynômes de degrés distincts (puisque $\deg(N_n) = n$ pour tout n). D'après un résultat du cours, elle est donc libre.

  De plus, il s'agit d'une famille de $r+1$ éléments de l'espace vectoriel $\mathscr{P}_r$ qui est de dimension $r+1$. Toujours d'après le cours, on peut conclure :

$$\boxed{\text{La famille } (N_n)_{n \in [0,r]} \text{ est une base de } \mathscr{P}_r .}$$

- La famille de polynômes $(\mathrm{N}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre car formée de polynômes de degrés distincts.
  De plus, si P est un polynôme quelconque de $\mathscr{P}$, il existe r entier tel que $\mathrm{P}\in\mathscr{P}_r$. D'après le résultat précédent, P sera donc combinaison linéaire des N_n pour $0\leqslant n\leqslant r$, donc a fortiori des N_n pour $n\in\mathbb{N}$.
  Cela signifie que la famille $(\mathrm{N}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathscr{P}$ et par suite :
  $$\boxed{(\mathrm{N}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base de } \mathscr{P}.}$$

d)
- Soit Q de degré $\leqslant r$. Puisque $(\mathrm{N}_n)_{n\in[0,r]}$ est une base de $\mathscr{P}_r$, il existe des coefficients réels $a_0,a_1,\dots,a_r$ tels que $\mathrm{Q}=\sum_{n=0}^{r}a_n\mathrm{N}_n$.
  Pour tout entier $k\in[\![0,r]\!]$ on aura alors, par linéarité
  $$\Delta^k(\mathrm{Q})=\sum_{n=0}^{r}a_n\Delta^k(\mathrm{N}_n)\quad(1)$$
  Mais $\Delta(\mathrm{N}_0)=0$ et $\Delta(\mathrm{N}_n)=\mathrm{N}_{n-1}$ si $n\geqslant 1$, donc par une récurrence facile on a
  $$\forall k\in\mathbb{N}\ ,\ \Delta^k(\mathrm{N}_n)=\begin{cases}\mathrm{N}_{n-k} & \text{si } k\leqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
  En reportant dans (1) on obtient
  $$\Delta^k(\mathrm{Q})=\sum_{n=k}^{r}a_n\mathrm{N}_{n-k}=a_k+\sum_{n=k+1}^{r}a_n\mathrm{N}_{n-k}.$$
  Puisque $\mathrm{N}_i(0)=0$ si $i\geqslant 1$, en appliquant cette dernière relation en 0 il vient : $\Delta^k(\mathrm{Q})(0)=a_k$ donc on a bien
  $$\boxed{\forall \mathrm{Q}\in\mathscr{P}_r\ ,\ \mathrm{Q}=\sum_{n=0}^{r}\Delta^n(\mathrm{Q})(0)\mathrm{N}_n.}$$
- Puisque $\Delta^n(\mathrm{Q})=0$ dès que n est strictement supérieur au degré de Q, on pourra donc écrire :
  $$\boxed{\forall \mathrm{Q}\in\mathscr{P}\ ,\ \mathrm{Q}=\sum_{n=0}^{+\infty}\Delta^n(\mathrm{Q})(0)\mathrm{N}_n}$$
  les termes de cette somme étant tous nuls à partir d'un certain rang.

e) Soit $\mathrm{P}\in\mathscr{P}$; on a aussi $\mathrm{P}=\sum_{n=0}^{+\infty}\Delta^n(\mathrm{P})(0)\mathrm{N}_n$ donc
$$\Delta(\mathrm{P})=\sum_{n=0}^{+\infty}\Delta^n(\mathrm{P})(0)\Delta(\mathrm{N}_n)\underbrace{=}_{\substack{\text{car}\\ \Delta(\mathrm{N}_0)=0}}\sum_{n=1}^{+\infty}\Delta^n(\mathrm{P})(0)\mathrm{N}_{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\Delta^{n+1}(\mathrm{P})(0)\mathrm{N}_n$$
La famille (N_n) étant libre, l'égalité $\Delta(\mathrm{P})=\mathrm{Q}$ est donc équivalente à
$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \Delta^{n+1}(\mathrm{P})(0)=\Delta^n(\mathrm{Q})(0)$$
ou encore à
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ \Delta^n(\mathrm{P})(0)=\Delta^{n-1}(\mathrm{Q})(0)$$
Les polynômes tels que $\Delta(\mathrm{P})=\mathrm{Q}$ sont donc les polynômes de la forme
$$\boxed{\mathrm{P}=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\Delta^{n-1}(\mathrm{Q})(0)\mathrm{N}_n\quad \text{avec } a_0 \text{ constante réelle quelconque.}}$$

f)
- Si $\Delta(\mathrm{P})=\mathrm{Q}$ on aura
  $$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Q}(k)=\sum_{k=0}^{n}\left[\mathrm{P}(k+1)-\mathrm{P}(k)\right]=\mathrm{P}(n+1)-\mathrm{P}(0).$$

- On prend ici $Q = X^2$. Puisque $N_1 = X$ et $N_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ on a $Q = 2N_2 + N_1$. D'après les calculs précédents, un polynôme P tel que $\Delta(P) = Q$ sera par exemple
$$P = 2N_3 + N_2 = \frac{1}{3}X(X-1)(X-2) + \frac{1}{2}X(X-1) = \frac{1}{6}X(X-1)(2X-1).$$
On aura donc
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} Q(k) = P(n+1) - P(0) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$
(formule bien connue).

5. La formule demandée pouvait assez facilement s'établir par récurrence sur n, mais il y a une méthode plus rapide et plus belle :

Notons T l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ défini par
$$\forall P \in \mathscr{P}\ ,\ T(P) = P(X+1)$$
de sorte que $\Delta = T - \mathrm{Id}$ (le fait que T soit un endomorphisme est immédiat).
Puisque les endomorphismes T et Id commutent, on peut appliquer la formule du binôme dans l'anneau $\mathscr{L}(\mathscr{P})$ et on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \Delta^n = (T - \mathrm{Id})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} T^i (-\mathrm{Id})^{n-i}$$
Par une récurrence immédiate, on a, pour tout $Q \in \mathscr{P}$ et tout entier i : $T^i(Q) = Q(X+i)$. La relation précédente appliquée à Q donne alors immédiatement :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \Delta^n(Q) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(X+i).}$$

6. **a)** Notons tout d'abord qu'on vérifierait facilement que $C(\Delta_r)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathscr{P}_r)$. L'énoncé ne le précise pas, mais parle ensuite de sa dimension...

i. Soient $g, h \in C(\Delta_r)$ tels que $g(N_r) = h(N_r)$. Puisque g et h commutent avec Δ_r on a
$$g(N_{r-1}) = g \circ \Delta_r(N_r) = \Delta_r \circ g(N_r) = \Delta_r \circ h(N_r) = h \circ \Delta_r(N_r) = h(N_{r-1})$$
et par récurrence descendante on obtient
$$\forall k \in [\![0, r]\!]\ ,\ g(N_k) = h(N_k).$$
Ainsi g et h, endomorphismes de $\mathscr{P}_r$, coïncident sur une base de $\mathscr{P}_r$ donc
$$\boxed{g = h.}$$

ii. immédiat, puisque $(N_n)_{n \in [0,r]}$ est une base de $\mathscr{P}_r$.

iii.
- Soit $g \in C(\Delta_r)$ et $a_0, a_1, \ldots, a_r$ tels que $g(N_r) = \sum_{n=0}^{r} a_n N_n$. Puisque, pour $n \in [\![0, r]\!]$, $N_n = \Delta_r^{r-n}(N_r)$, on a $g(N_r) = \left(\sum_{n=0}^{r} a_n \Delta_r^{r-n}\right)(N_r)$.
Or l'endomorphisme de $\mathscr{P}_r$ défini par $h = \sum_{n=0}^{r} a_n \Delta_r^{r-n}$ est élément de $C(\Delta_r)$ (vérification facile).
Il résulte alors de la question 6.a.i que $g = h$ c'est-à-dire $g = \sum_{n=0}^{r} a_n \Delta_r^{r-n}$.
g est donc combinaison linéaire des Δ_r^k pour $0 \leqslant k \leqslant r$, c'est-à-dire que la famille $(\Delta_r^k)_{k \in [0,r]}$ est génératrice de $C(\Delta_r)$.
- Montrons maintenant que cette famille est libre.
En effet, si on a $\sum_{k=0}^{r} a_k \Delta_r^k = 0$, alors en appliquant cette égalité à N_0, puisque $\Delta(N_0) = 0$, on obtient $a_0 = 0$, puis en l'appliquant à N_1, puisque $\Delta(N_1) = N_0 = 1$ et $\Delta^2(N_1) = 0$ on trouve $a_1 = 0$ etc... Ainsi, tous les a_k sont nuls, ce qui prouve que la famille est libre.

En conclusion :

$$\boxed{(\Delta_r^k)_{k\in[0,r]} \text{ est une base de } \mathrm{C}(\Delta_r).}$$

iv. Le fait que d et Δ commutent est immédiat.

S'il existait un entier r et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_r$ tels que $d = \sum_{k=0}^{r} a_k \Delta^k$, on aurait en particulier $\mathrm{N}'_{r+1} = d(\mathrm{N}_{r+1}) = \sum_{k=0}^{r} a_k \Delta^k(\mathrm{N}_{r+1}) = \sum_{k=0}^{r} a_k \mathrm{N}_{r+1-k}$. Mais tous les polynômes N_{r+1-k} pour $0 \leqslant k \leqslant r$ s'annulent en 0. On aurait donc $\mathrm{N}'_{r+1}(0) = 0$ et 0 serait racine au moins double de N_{r+1}, ce qui n'est pas vrai (les racines de N_{r+1} sont simples, ce sont les entiers $0, 1, \ldots, r$).
On a donc obtenu une contradiction. Cet exemple montre en fait que le commutant de Δ n'est pas réduit au sous-espace vectoriel engendré par les Δ^k, contrairement au commutant de Δ_r.

b) Supposons qu'il existe $g \in \mathscr{L}(\mathscr{P}_r)$ tel que $g \circ g = \Delta_r$. On aurait alors

$$g \circ \Delta_r = g^3 = \Delta_r \circ g$$

c'est-à-dire que g commute avec Δ_r.
D'après ce qui précède, il existerait des réels $a_0, a_1, \ldots, a_r$ tels que $g = \sum_{k=0}^{r} a_k \Delta_r^k = a_0 \mathrm{Id} + a_1 \Delta_r + \ldots + a_r \Delta_r^r$.
On aurait alors $g \circ g = a_0^2 \mathrm{Id} + 2a_0 a_1 \Delta_r + \sum_{k=2}^{r} b_k \Delta_r^k$ où les b_k sont des réels dont la valeur importe peu.
Puisque la famille $(\Delta_r^k)_{k\in[0,r]}$ est libre, cela implique $a_0 = 0$ et $2a_0 a_1 = 1$, ce qui est impossible. Il y a donc contradiction et

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } g \text{ de } \mathscr{P}_r \text{ tel que } g \circ g = \Delta_r.}$$

Seconde partie

1. Notons d'abord que les définitions de l'énoncé posent problème lorsque $n = 0$. On supposera donc $n \geqslant 1$ pour la suite.
On remarquera aussi que, puisque l'énoncé suppose $x \notin \mathbb{N}$, les $\mathrm{N}_n(x)$, donc les u_n, ne sont pas nuls.

a) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^t \dfrac{\left|\mathrm{N}_{n+1}(x)\right|}{\left|\mathrm{N}_n(x)\right|} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^t \dfrac{|x-n|}{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{t-1} \dfrac{|x-n|}{n}$.
Pour n assez grand on aura $n - x > 0$ (x est fixé) donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{t-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)$$

puis

$$v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = (t-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = \frac{t-1-x}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit immédiatement :

- si $t \neq 1 + x$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{t-1-x}{n}$: la série de terme général v_n diverge.
- si $t = 1 + x$, $v_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général v_n converge.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_n) - \ln(u_1)$ donc, compte tenu des résultats précédents :

- Si $t < 1 + x$: la série de terme général v_n diverge et $v_n < 0$ à partir d'un certain rang, donc $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} v_k\right) = -\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $t > 1 + x$: la série de terme général v_n diverge et $v_n > 0$ à partir d'un certain rang, donc $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} v_k\right) = +\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- Si $t=1+x$: la série de terme général v_n converge , donc la suite $(\ln(u_n))$ converge vers un certain réel ℓ_x et (u_n) converge vers un réel $\mathrm{C}(x)=\mathrm{e}^{\ell_x}>0$.
  On a donc dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1+x}\left|\mathrm{N}_n(x)\right|=\mathrm{C}(x)$ soir
  $$\boxed{\left|\mathrm{N}_n(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{C}(x)}{n^{x+1}}.}$$
  Rem : les connaisseurs auront reconnu ici le critère de Duhamel-Raabe...

2. a) Si $f(x)=b^x$ on a
$$a_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}b^i=(b-1)^n$$
d'après la formule du binôme.

b)
- Si $\mathrm{Q}=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\mathrm{N}_k$, Q est de degré $\leqslant n$ et on a vu dans I.4.d que $\mathrm{Q}=\sum\limits_{k=0}^{n}\Delta^k(\mathrm{Q})(0)\mathrm{N}_k$.
  La famille des polynômes (N_k) étant libre, on en déduit
  $$\boxed{\forall k\in[\![0,n]\!]\ ,\ a_k=\Delta^k\mathrm{Q}(0).}$$
- Soit R le polynôme de degré n tel que $\mathrm{R}(i)=f(i)$ pour tout $i\in[\![0,n]\!]$ (un tel polynôme existe et est unique d'après les résultats du cours sur les polynômes d'interpolation de Lagrange). D'après I.4.d, on a $\mathrm{R}=\sum\limits_{k=0}^{n}\Delta^k(\mathrm{R})(0)\mathrm{N}_k$ et d'après I.5,
  $$\Delta^k(\mathrm{R})(0)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\mathrm{R}(i)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(i)=a_k,$$
  donc $\mathrm{R}=\mathrm{Q}$.
  Par définition de R on a donc bien
  $$\boxed{f(i)-\mathrm{Q}(i)=f(i)-\mathrm{R}(i)=0 \text{ pour tout } i\in[\![0,n]\!].}$$

c)
- Supposons dans un premier temps $x\notin[\![0,n]\!]$.
  Soit $\varphi: t\mapsto f(t)-\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\mathrm{N}_k(t)-\mathrm{N}_{n+1}(t)\mathrm{A}$, où A est le réel tel que $\varphi(x)=0$ (A existe et est unique puisque l'équation $\varphi(x)=0$ équivaut à $\mathrm{AN}_{n+1}(x)=f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\mathrm{N}_k(x)$ et que $\mathrm{N}_{n+1}(x)$ est non nul ici).
  Puisque $\mathrm{N}_{n+1}(i)=0$ pour tout $i\in[\![0,n]\!]$ et compte tenu du résultat de la question précédente, la fonction φ s'annule en $0,1,\ldots,n$ et en x, c'est-à-dire en $n+2$ points distincts. Étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ (car f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par hypothèse et les autres termes sont des fonctions polynomiales), l'application itérée du théorème de Rolle montre qu'il existe un réel θ tel que $\varphi^{(n+1)}(\theta)=0$.
  Mais $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\mathrm{N}_k$ est un polynôme de degré $\leqslant n$, donc sa dérivée $(n+1)$-ième est nulle et puisque le terme de plus haut degré de N_{n+1} est $\dfrac{\mathrm{X}^{n+1}}{(n+1)!}$, on a $\mathrm{N}_{n+1}^{(n+1)}=1$. Ainsi, $\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-\mathrm{A}$, et la relation $\varphi^{(n+1)}(\theta)=0$ donne $\mathrm{A}=f^{(n+1)}(\theta)$.
  En remplaçant A par cette valeur dans la relation $\varphi(x)=0$ on trouve bien
  $$\boxed{\forall x\geqslant 0\ ,\ \exists\theta\in\mathbb{R}\ \text{ tq }\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\mathrm{N}_k(x)+f^{(n+1)}(\theta)\mathrm{N}_{n+1}(x)\quad(2).}$$
- Enfin, cette propriété reste vraie lorsque $x\in[\![0,n]\!]$ d'après le résultat de la question II.2.b et puisque alors $\mathrm{N}_{n+1}(x)=0$: il suffit de prendre θ quelconque.

d)
- En reprenant les notations précédentes et compte tenu de l'hypothèse faite ici, on aura
  $$\left|f^{(n+1)}(\theta)\mathrm{N}_{n+1}(x)\right|\leqslant \mathrm{M}n\left|\mathrm{N}_{n+1}(x)\right|$$
  Or, d'après II.1.b, $\left|\mathrm{N}_{n+1}(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{C}(x)}{(n+1)^{x+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{C}(x)}{n^{x+1}}$, donc $n\left|\mathrm{N}_{n+1}(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{C}(x)}{n^x}$.
  Pour $x>0$ on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{(n+1)}(\theta)\mathrm{N}_{n+1}(x)=0$ et la relation (2) implique

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{N}_k(x)}$$

cette relation restant trivialement vraie pour $x = 0$ puisque $a_0 = f(0)$ et $\mathrm{N}_k(0) = 0$ si $k \geqslant 1$.

- Si on suppose de plus $f(i) = 0$ pour tout entier i, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ $a_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(i) = 0$ d'où $f(x) = 0$ pour tout $x \geqslant 0$.

3. **a)** En reprenant le résultat de II.1.b, puisque $x \notin \mathbb{N}$:

$$h^n \left|\mathrm{N}_n(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{C}(x)\frac{h^n}{n^{x+1}}$$

donc si $|h| > 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|h^n \mathrm{N}_n(x)\right| = +\infty$ (croissances comparées) d'où

$$\boxed{\text{si } |h| > 1 \text{, la série } \sum h^n \mathrm{N}_n(x) \text{ est grossièrement divergente.}}$$

b) On suppose ici $|h| < 1$.

i.
- Si $x = k \in \mathbb{N}$ alors $\mathrm{N}_n(x) = 0$ dès que $n \geqslant k + 1$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} h^n \mathrm{N}_n(x)$ est convergente (somme finie).
- Sinon, on a toujours l'équivalent $h^n \left|\mathrm{N}_n(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{C}(x)\dfrac{h^n}{n^{x+1}}$, donc, toujours à l'aide des croissances comparées des suites usuelles, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 h^n \mathrm{N}_n(x) = 0$. Ainsi, $h^n \mathrm{N}_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et d'après les théorèmes de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} h^n \mathrm{N}_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

ii.
- La fonction $f : h \mapsto (1+h)^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$, on peut donc lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à tout ordre n entre 0 et h :

$$f(h) = \sum_{k=0}^{n} h^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \quad (3)$$

Or, pour $k \geqslant 1$, $\dfrac{f^{(k)}(h)}{k!} = \dfrac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}(1+x)^{x-k} = \mathrm{N}_k(x)(1+h)^{x-k}$, cette dernière égalité restant vraie pour $k = 0$ puisque $\mathrm{N}_0 = 1$, de sorte que la relation (3) devient

$$(1+h)^x = \sum_{k=0}^{n} h^k \mathrm{N}_k(x) + (n+1)\mathrm{N}_{n+1}(x) \int_0^h (h-t)^n (1+t)^{x-n-1}\,\mathrm{d}t$$

ce qui se réécrit en :

$$\boxed{(1+h)^x - \sum_{k=0}^{n} h^k \mathrm{N}_k(x) = (n+1)\mathrm{N}_{n+1}(x) \int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t \quad (4).}$$

- On a la majoration

$$\left|\frac{1}{h^n}\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|h|^n}\left|\int_0^h \left|\frac{h-t}{1+t}\right|^n (1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t\right|$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{h-t}{1+t}$ est une fonction homographique, donc monotone ; ses valeurs extrémales sur $[0, h]$ sont donc obtenues pour $t = 0$ et $t = h$; ce sont respectivement h^n et 0, de sorte que

$$\forall t \in [0, h] \text{ (ou } [h, 0]) \text{ , } \left|\frac{h-t}{1+t}\right|^n \leqslant |h^n|$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \left|\frac{1}{h^n}\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^h (1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t\right|$$

(inutile de calculer la valeur de cette dernière intégrale, ce qui est important, c'est qu'elle ne dépend pas de n).

iii. Si x est entier, $\mathrm{N}_{n+1}(x)=0$ dès que $n\geqslant x$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\mathrm{N}_{n+1}(x)\displaystyle\int_0^h\left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n(1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t=0$.

Sinon, l'équivalent $\left|\mathrm{N}_{n+1}(x)\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{C}(x)}{(n+1)^{x+1}}$ obtenu en II.1.b donne

$$\left|(n+1)\mathrm{N}_{n+1}(x)\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{C}(x)}{(n+1)^{x}}$$

D'après la question précédente, il existe une constante K telle que

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \left|\int_0^h\left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n(1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant \mathrm{K}\,|h|^n$$

et, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{h^n}{n^{x+1}}=0$ (croissances comparées), on a encore $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\mathrm{N}_{n+1}(x)\displaystyle\int_0^h\left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n(1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t=0$.

En utilisant alors la relation (4), on obtient

$$\boxed{\forall h\in]-1,1[\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}\ ,\ (1+h)^x=\sum_{k=0}^{+\infty}h^k\mathrm{N}_k(x).}$$

c) On suppose ici $h=1$.

i. Pour $x\leqslant -1$, x n'est pas un entier naturel et l'on a toujours $\left|\mathrm{N}_n(x)\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{C}(x)}{n^{x+1}}$. $x+1$ étant $\leqslant 0$, la suite $(\mathrm{N}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend donc pas vers 0 (car $\mathrm{C}(x)>0$) c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{si } x\leqslant 1\text{, la série } \sum_{n\geqslant 0}\mathrm{N}_n(x) \text{ est grossièrement divergente.}}$$

ii. En remplaçant h par 1 dans la relation de la question II.3.b.ii, on obtient

$$2^x-\sum_{k=0}^{n}\mathrm{N}_k(x)=(n+1)\mathrm{N}_{n+1}(x)\int_0^1\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n(1+u)^{x-1}\,\mathrm{d}u\quad(5)$$

Or, pour $u\in[0,1]$, $0\leqslant\dfrac{1-u}{1+u}\leqslant 1-u$ et $(1+u)^{x-1}\leqslant\max(1,2^{x-1})=\mathrm{M}$ donc

$$\left|(n+1)\mathrm{N}_{n+1}(x)\int_0^1\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n(1+u)^{x-1}\,\mathrm{d}u\right|\leqslant \mathrm{M}(n+1)\left|\mathrm{N}_{n+1}(x)\right|\int_0^1(1-u)^n\,\mathrm{d}u=\mathrm{M}\left|\mathrm{N}_{n+1}(x)\right|\quad(6).$$

Si x est un entier naturel, $\mathrm{N}_{n+1}(x)$ est nul pour n assez grand, et sinon, l'équivalent $\left|\mathrm{N}_{n+1}(x)\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{C}(x)}{(n+1)^{x+1}}$ obtenu en II.1.b montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{N}_{n+1}(x)=0$ puisqu'ici $x+1>0$.

On aura donc encore, d'après (6), $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\mathrm{N}_{n+1}(x)\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n(1+u)^{x-1}\,\mathrm{d}u=0$ ce qui prouve d'après (5) que

$$\boxed{\forall x>-1\ ,\ \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{N}_k(x)=2^x.}$$

d) On examine donc ici le dernier cas, à savoir $h=-1$.

i. • Si x est un entier naturel, $(-1)^n\mathrm{N}_n(x)$ est nul dès que $n\geqslant x+1$; dans ce cas, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n\mathrm{N}_n(x)$ converge (somme finie).

Sinon, $\left|(-1)^n\mathrm{N}_n(x)\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{C}(x)}{n^{x+1}}$ où $\mathrm{C}(x)>0$, donc les théorèmes de comparaison sur les séries à termes positifs et les résultats sur les séries de Riemann montrent que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left|(-1)^n\mathrm{N}_n(x)\right|$ converge si et seulement si $x>0$.

En rassemblant les deux cas, on en déduit

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \mathrm{N}_n(x) \text{ est absolument convergente si et seulement si } x \geqslant 0.}$$

- Si $x \geqslant 0$, $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \mathrm{N}_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.

  Si $x < 0$ et $n \geqslant 1$, $\mathrm{N}_n(x) = \dfrac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$ est du signe de $(-1)^n$ donc $(-1)^n \mathrm{N}_n(x)$ est positif et la convergence de la série équivaut alors à son absolue convergence, qui n'a pas lieu dans ce cas. En conclusion

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \mathrm{N}_n(x) \text{ est convergente si et seulement si } x \geqslant 0.}$$

ii. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{N}_0(x) - \mathrm{N}_1(x) + \ldots + (-1)^n \mathrm{N}_n(x) = (-1)^n \mathrm{N}_n(x-1)$ »

- Cette propriété est facilement vérifiée pour $n = 1$ puisque $\mathrm{N}_0(x) - \mathrm{N}_1(x) = 1 - x = -(x-1) = -\mathrm{N}_1(x-1)$.
- Si on la suppose vérifiée au rang n, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_0(x) - \mathrm{N}_1(x) + \ldots + (-1)^n \mathrm{N}_n(x) + (-1)^{n+1}\mathrm{N}_{n+1}(x) &= (-1)^n \mathrm{N}_n(x-1) + (-1)^{n+1}\mathrm{N}_{n+1}(x) \\
&= (-1)^n \left[\Delta(\mathrm{N}_{n+1})(x-1) - \mathrm{N}_{n+1}(x)\right] \\
&= (-1)^n \left[\mathrm{N}_{n+1}(x-1+1) - \mathrm{N}_{n+1}(x-1) - \mathrm{N}_{n+1}(x)\right] \\
&= (-1)^{n+1}\mathrm{N}_{n+1}(x-1)
\end{aligned}$$

  ce qui établit le résultat à l'ordre $n+1$ et achève la récurrence.

iii. La relation précédente s'écrit : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{N}_k(x) = (-1)^n \mathrm{N}_n(x-1)$.

Si $x-1$ est un entier naturel, c'est-à-dire si $x \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{N}_k(x)$ est nul pour $k \geqslant x+1$ et $\mathrm{N}_n(x-1)$ est nul pour $n \geqslant x$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \mathrm{N}_k(x) = 0$.

Si $x = 0$, $\mathrm{N}_k(x) = 0$ pour $k \geqslant 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \mathrm{N}_k(x) = \mathrm{N}_0 = 1$.

Sinon, l'équivalent $\left|\mathrm{N}_n(x-1)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{C}(x)}{n^x}$ montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{N}_n(x-1) = 0$ puisque $x > 0$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \mathrm{N}_k(x) = 0$.

La conclusion de toute la question II.3 est donc la suivante :

La relation $(1+h)^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} h^k \mathrm{N}_k(x)$ est vraie si et seulement si

- $|h| < 1$ et x réel quelconque.
- $h = 1$ et $x > -1$.
- $h = -1$ et $x \geqslant 0$.