# CORRIGÉ DU DM N°5 : CENTRALE PC 2004, MATHS 1

## *Partie I - Calculs préliminaires*

**I.A** Les deux inégalités résultent de la concavité de la fonction sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ : $\sin x \leqslant x$ découle du fait que la courbe est située en-dessous de sa tangente en $0$, l'inégalité $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x$ exprime le fait que la courbe est située au-dessus du segment joignant les points de coordonnées $(0,0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

*On pouvait aussi, bien sûr, démontrer ces inégalités à l'aide d'études de fonctions.*

**I.B** Puisque $e^{ix} \neq 0$, les résultats sur les suites géométriques donnent :

$$\left|\sum_{k=p}^{q} e^{ikx}\right| = \left|\frac{e^{ipx}.(1-e^{i(q-p+1)x})}{1-e^{ix}}\right| = \left|e^{ipx}\frac{2i\sin\left((q-p+1)\frac{x}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}.$$

**I.C** *Cette question porte sur la très classique transformation d'Abel.*

**I.C.1**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p+1}^{q-1}(u_k-u_{k+1})V_k &= \sum_{k=p+1}^{q-1} u_k V_k - \sum_{k=p+2}^{q} u_k V_{k-1} \\
&= u_{p+1}V_{p+1} + \sum_{k=p+2}^{q-1} u_k v_k - u_q V_{q-1} \qquad \text{car } V_k - V_{k-1} = v_k \\
&= u_{p+1}V_p + \sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k - u_q V_q \qquad \text{car } V_{p+1} = V_p + v_{p+1} \text{ et } V_{q-1} = V_q - v_q
\end{aligned}$$

d'où : $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k = \sum_{k=p+1}^{q-1}(u_k-u_{k+1})V_k + u_q V_q - u_{p+1}V_p$ .

**I.C.2** Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n v_n$ converge revient à prouver, d'après le critère de Cauchy appliqué aux sommes partielles de la série, que $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k \to 0$ quand $p, q \to +\infty$ .

Les hypothèses de l'énoncé entrainent par majoration élémentaire que $\left|\displaystyle\sum_{k=p+1}^{q-1}(u_k-u_{k+1})V_k\right| \to 0$ et , puisque $u_n \to 0$ alors $u_q.V_q - u_{p+1}.V_p \to 0$ quand $p, q \to +\infty$ . La convergence de $\sum u_n.v_n$ est alors conséquence de l'égalité obtenue dans la question précédente.

*Remarque :* j'ai ici utilisé le critère de Cauchy car c'est visiblement ce que souhaitait l'énoncé en faisant calculer les sommes partielles de $p+1$ à $q$. Une autre solution consiste à utiliser la relation de **I.C.1** en remplaçant $p$ par 0 et $q$ par $n$ pour démontrer directement la convergence des sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k v_k$ : **cf. DM n°2** ! !

**I.C.3** Si $(u_n)$ est décroissante et convergente, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|u_k - u_{k+1}| = \sum_{k=1}^{n} u_k - u_{k+1} = u_1 - u_{n+1} \to u_1 - \lim(u_n)$ , et les hypothèses de la question précédente sont vérifiées, ce qui permet de conclure à la convergence de la série $\sum u_n.v_n$ .

**I.D** Les séries proposées sont les parties réelle et imaginaire de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{e^{ikx}}{k}$ ; posant $u_k = 1/k$ et $v_k = e^{ikx}$ , les conditions d'application de **I-C-3** sont réunies (au vu de la majoration obtenue en **I-B** ) , donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{e^{ikx}}{k}$ converge.

Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ , alors $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{\cos(kx)}{k} = \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}$ qui diverge, et

$dsum_{k\geqslant 1}\dfrac{\sin(kx)}{k}$ est la série nulle.

## *Partie II - Quelques exemples d'ensembles* $C_a$

**II.A**

- Si $|z| < 1$ alors $|z.R_a| < R_a$ donc $\sum b_n z^n = \sum a_n (z.R_a)^n$ est absolument convergente.
- Si $|z| > 1$ alors $|z.R_a| > R_a$ donc $\sum b_n z^n = \sum a_n (zR_a)^n$ diverge grossièrement .

Il en résulte que le rayon de convergence de la série $\sum b_n z^n$ est égal à 1.

- $z \in C_a \iff (|z| = R_a$ et $\sum a_n z^n$ converge$) \iff (|z/R_a| = 1$ et $\sum b_n (z/R_a)^n$ converge$) \iff \dfrac{z}{R_a} \in C_b$ .

**II.B**

**II.B.1** Si $|z| = R_a = 1$ alors $|a_n z^n| = |a_n|$ donc $z \in C_a$ : $C_a$ est le cercle unité .

**II.B.2** $\forall x \in I$ , $|e^{inx}| = 1$ donc $|f_n(x)| = a_n$ et $\sum \|f_n\|_\infty^I = \sum |a_n|$ qui converge : il y a convergence normale donc uniforme de $\sum f_n$ sur I, et la fonction somme est par conséquent continue sur I.

**II.B.3** On prend $a_n = 1/n^2$.

**II.C** Prendre $a_n = 1$.

**II.D II.D.1**

• Supposons $R_a > 1$. Alors $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour $|z| < R_a$ donc pour $|z| \leqslant 1$ donc en particulier pour $z_0$, ce qui est faux. Donc $R_a \leqslant 1$.

• Supposons $R_a < 1$. $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour $|z| > R_a$ , donc en particulier pour $z_0$ , ce qui est faux : $R_a \geqslant 1$ .

On conclut : $R_a = 1$ .

**II.D.2** • Si $z = \xi$, alors $\sum a_n z^n = \sum 1/n$ est divergente.

• Si $|z| = 1$ et $z \neq \xi$ alors $\dfrac{z}{\xi} = e^{ix}$ avec $x \notin 2k\pi\mathbb{Z}$ et $\sum a_n \left(\dfrac{z}{\xi}\right)^n$ converge par application de **I.C.3** et de **I.B**.

On conclut : $C_a$ est le cercle unité privé de $\xi$ .

**II.D.3** $a_n = \dfrac{1}{n}.\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{\xi_k^n}$ convient, compte tenu du résultat précédent et du cours sur la somme de séries.

**II.D.4** $\cos n = \dfrac{1}{2}\left(e^{in} + e^{-in}\right)$. Au facteur $1/2$ près, on se retrouve dans les hypothèses de la question précédente, avec $p = 2$ , $\xi_1 = e^i$ et $\xi_2 = e^{-i}$.

Donc $R_a = 1$ et $C_a$ est le cercle unité privé des 2 points $e^i$ et $e^{-i}$.

$\sum |a_n|$ diverge car dans le cas contraire, d'après **II.B**, $C_a$ serait le cercle unité complet.

## *Partie III - Un exemple pour lequel* $C_a$ *est le cercle unité et* $\sum |a_n|$ *diverge*

**III.A** Il est clair que $|a_n| \sim 1/n$ donc $\sum |a_n|$ diverge.

**III.B**

**III.B.1** $|R_N| = \left|\displaystyle\sum_{k=P^2}^{N} a_n\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=P^2}^{N} \frac{1}{P^2} \leqslant \sum_{k=P^2}^{(P+1)^2-1} \frac{1}{P^2} = \frac{(P+1)^2 - P^2}{P^2} = \frac{2P+1}{P^2}$.

**III.B.2** $A_N = A_{P^2-1} + R_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{P-1}\left(\sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{(-1)^k}{k^2}\right) + R_N = \sum_{k=1}^{P-1} (-1)^k \frac{2k+1}{k^2} + R_N$.

$A_N$ apparaît comme une somme de deux termes. Le premier est une somme partielle d'une série qui vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées (le faire...) donc qui est convergente, et le deuxième, $R_N$, tend vers 0 quand N tend vers l'infini, d'après la majoration obtenue à la question précédente (puisque, lorsque $N \to +\infty$ on a aussi $P \to +\infty$).

La série $\sum a_n$ est donc convergente car la suite $(A_N)$ de ses sommes partielles est convergente.

**III.C**

**III.C.1** Dans le cas « général », $a_{n+1} - a_n = 0$ .

Le cas « particulier » se produit lorsque $n = (p+1)^2 - 1$ et $n+1 = (p+1)^2$. Dans ce cas, $a_{n+1} = \dfrac{(-1)^{p+1}}{(p+1)^2}$ et $a_n = \dfrac{(-1)^p}{p^2}$ donc

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \leqslant \frac{2}{p^2}\,.$$

Les sommes partielles de la série de terme général (positif) $|a_{n+1} - a_n|$ sont donc majorées par $2\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{3}$, ce qui implique sa convergence.

**III.C.2** Si $x \in \mathrm{I}\backslash\{0\}$, on a $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ donc en posant $u_n = a_n$ et $v_n = \mathrm{e}^{inx} = z^n$, on peut appliquer **I.B** et **I.C.2**, donc $\sum a_n z^n$ converge.

Dans le cas $z = 1$ la série converge d'après **III.B**, donc on a bien ici $\mathrm{C}_a$ égal au cercle unité.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆