CORRIGÉ DU DS°1

I. DÉVELOPPEMENT D'UN NOMBRE IRRATIONNEL EN FRACTION CONTINUE

A. Réduites d'une fraction continue.

I.1. Par définition, $q_0 = 1 \geqslant 0$ et a_1, a_2 sont dans $\mathbb{N}^*$, donc $q_1 = a_1 \geqslant 1$ et $q_2 = a_2 q_1 + q_0 \geqslant 2$.
Si, pour $n \geqslant 3$, l'on suppose $q_k \geqslant k$ pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, alors

$$q_n = a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2} \geqslant 1 \cdot (n-1) + (n-2) \geqslant n \quad \text{car } n \geqslant 3.$$

On a ainsi prouvé le résultat par récurrence.

I.2. Pour $n = 1$, $p_1 q_0 - q_1 p_0 = (a_0 a_1 + 1) - a_1 a_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$:

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (a_n p_{n-1} + p_{n-2})\, q_{n-1} - (a_n q_n + q_{n-2})\, p_{n-1} = -\left(p_{n-1} q_{n-2} - q_{n-1} p_{n-2}\right).$$

Par conséquent et par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

I.3. Pour $n \geqslant 2$:

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (a_n p_{n-1} + p_{n-2})\, q_{n-2} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2})\, p_{n-2} = a_n \left(p_{n-1} q_{n-2} - q_{n-1} p_{n-2}\right).$$

Soit, d'après le résultat précédent :

$$\forall n \geqslant 2, \quad p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n.$$

I.4. Étude de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.4.a. Grâce aux deuxquestions précédentes, on obtient immédiatement, après réduction au même dénominateur :

$$\text{pour } n \geqslant 1, r_n - r_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} \quad \text{et, pour } n \geqslant 2,\ r_n - r_{n-2} = \frac{(-1)^n a_n}{q_{n-2} q_n}.$$

I.4.b. Puisque les a_k et les q_k sont positifs, le calcul ci-dessus montre que $r_n - r_{n-2}$ est du signe de $(-1)^n$, donc la suite (r_{2n}) est croissante et la suite (r_{2n+1}) est décroissante.

De plus, d'après **I.1.**, $q_{n-1} q_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $r_n - r_{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après le résultat précédent ; en particulier, la suite $(r_{2n+1} - r_{2n})$ converge vers 0. En conclusion, par définition :

les suites $(r_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(r_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes.

I.4.c. Il résulte du cours que ces deux suites ont une limite commune α. C'est alors un exercice classique que de montrer que la suite entière $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En effet, par définition des limites, si on se donne $\varepsilon > 0$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geqslant n_0 \Longrightarrow |r_{2n} - \alpha| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geqslant n_1 \Longrightarrow |r_{2n+1} - \alpha| \leqslant \varepsilon$$

donc on aura

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant \max(2n_0, 2n_1 + 1) \Longrightarrow |r_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$$

ce qui est exactement la définition de : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \alpha$.

I.4.d. – En reprenant les arguments de **I.4.b**, puisque les a_k sont strictement positifs pour $k \geqslant 1$, on obtient que la suite $(r_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est *strictement* croissante de limite α et que la suite $(r_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est *strictement* décroissante de limite α, donc pour tout entier n on aura $r_{2n} < \alpha < r_{2n+1}$, puis $0 < \alpha - r_{2n} < r_{2n+1} - r_{2n}$.

– On en déduit, comme on a supposé $\alpha = \dfrac{c}{d}$, et en utilisant **I.2.**

$$0 < \frac{c q_{2n} - d p_{2n}}{d q_{2n}} < \frac{1}{q_{2n} q_{2n+1}}.$$

D'où, en multipliant par $d q_{2n}$ (strictement positif !) :

$$k_n = c q_{2n} - d p_{2n} \text{ est entier et vérifie } 0 < k_n < \frac{d}{q_{2n+1}}.$$

Il en résulte que $\dfrac{d}{q_{2n+1}} > 1$ pour tout n, ce qui contredit le **I.1.**, d étant fixé.

On a donc prouvé par l'absurde que α n'est pas rationnel.

B. Injectivité de F.

I.5.

I.5.a. Un calcul simple donne

$$[a_0, a_1] = \frac{a_0a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1} \quad \text{et} \quad [a_0, a_1, a_2] = \frac{a_0a_1a_2 + a_0 + a_2}{a_1a_2 + 1} = \frac{p_2}{q_2} \cdot$$

I.5.b. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $[a_0, \ldots, a_n] = \dfrac{p_n}{q_n}$ ».

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $p_0 = a_0$ et $q_0 = 1$, et le calcul précédent montre que $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ le sont aussi.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifiée. Alors, $[a_0, \ldots, a_n] = \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{a_np_{n-1} + p_{n-2}}{a_nq_{n-1} + q_{n-2}}$, où $p_{n-1}, p_{n-2}, q_{n-1}, q_{n-2}$ ne dépendent que de $a_0, \ldots, a_{n-1}$; remplacer a_n par $a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}$ conduira donc à

$$\left[a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right] = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{a_{n+1}\left(a_np_{n-1} + p_{n-2}\right) + p_{n-1}}{a_{n+1}\left(a_nq_{n-1} + q_{n-2}\right) + q_{n-1}},$$

soit, par définition des suites (p_n) et (q_n) :

$$[a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}] = \left[a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right] = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

ce qui est le résultat voulu à l'ordre $n + 1$ et achève la récurrence.

I.6.

I.6.a. D'après **I.4.**, $r_0 = a_0 < \alpha < r_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_1}$; or $a_1 \geqslant 1$, donc $a_0 \leqslant \alpha < a_0 + 1$; puisque a_0 est entier on a donc $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$.

I.6.b. Il est facile de vérifier la relation :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad r_n = [a_0, \ldots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \ldots, a_n]} \ ,$$

d'où, pour n tendant vers l'infini : $\alpha = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}$. En appliquant, pour k fixé dans $\mathbb{N}$, ce même résultat à la suite $(a_{k+n})_{n\in\mathbb{N}}$, qui est aussi dans S, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}.$$

I.6.c. On en déduit comme au **I.6.a.** que $a_k = \mathrm{E}(\alpha_k)$ pour tout k. Ainsi, à partir de la valeur de α, la suite (a_n) se construit par récurrence, parallèlement à la suite (α_n), grâce aux relations suivantes :

$$\alpha_0 = \alpha \ , \ a_0 = \lfloor \alpha \rfloor \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} \ , \ a_{k+1} = \lfloor \alpha_{k+1} \rfloor \ .$$

Cela montre, pour α donné, l'unicité de la suite a telle $\alpha = \mathrm{F}(a)$. Par conséquent, F est injective.

C. Surjectivité de F.

I.7.

I.7.a. • Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\alpha_n \in \mathbb{Q}$.

- Cette proposition est vraie au rang $n = 0$, puisque $\alpha_0 = x \in \mathbb{Q}$ par hypothèse.
- Supposons qu'à un rang n donné on a $\alpha_n \in \mathbb{Q}$. Alors $y_n = \alpha_n - \lfloor \alpha_n \rfloor$ est aussi rationnel et, puisqu'il est supposé non nul, on a $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{y_n} \in \mathbb{Q}$, ce qui établit la proposition au rang $n + 1$.

• Pour $n \geqslant 1$, $\alpha_n = \dfrac{1}{y_{n-1}}$ avec $y_{n-1} = \alpha_{n-1} - \lfloor \alpha_{n-1} \rfloor$ dans $]0, 1[$, donc on a bien $\alpha_n > 1$.

I.7.b. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $v_n > 0$ et $\alpha_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

– Cette proposition est vraie au rang $n=0$, car $v_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_0 = \dfrac{u_0}{v_0}$ par hypothèse.

– Supposons qu'à un rang $n>0$ donné, on ait $v_n > 0$ et $\alpha_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.
La division euclidienne de u_n par v_n s'écrit : $u_n = v_n q_n + v_{n+1}$, avec $q_n \in \mathbb{Z}$ le quotient et $v_{n+1} \in \mathbb{N}$ le reste tel que $0 \leqslant v_{n+1} < v_n$.
Donc $\dfrac{u_n}{v_n} = q_n + \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ avec $0 \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ ce qui implique $\left\lfloor \dfrac{u_n}{v_n} \right\rfloor = q_n$.
Si v_{n+1} était nul, on aurait $\dfrac{u_n}{v_n} = q_n$ d'où $y_n = \alpha_n - \lfloor \alpha_n \rfloor = \dfrac{u_n}{v_n} - q_n = 0$ ce qui est exclu.
Ainsi $v_{n+1} > 0$. De plus, $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{y_n} = \dfrac{1}{\alpha_n - \lfloor \alpha_n \rfloor} = \dfrac{1}{\frac{u_n}{v_n} - q_n} = \dfrac{1}{\frac{v_{n+1}}{v_n}} = \dfrac{v_n}{v_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$, ce qui établit la proposition au rang $n+1$ et achève la récurrence.

I.7.c. On a montré ci-dessus que pour tout n, $0 \leqslant v_{n+1} < v_n$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante et constituée *d'entiers*. Donc pour tout n $v_{n+1} \leqslant v_n - 1$ et par une récurrence immédiate, on vérifie que alors, $v_n \leqslant v_0 - n$; une telle suite aurait pour limite $-\infty$, ce qui est impossible car on a vu que tous les termes v_n sont positifs.

L'hypothèse de **I.7** est donc impossible, ce qui signifie que, si x est rationnel, il existe un rang n_0 tel que $y_{n_0} = 0$ et a_{n_0+1} ne peut être défini.

I.8. – On vient de voir que, si x est rationnel, a_n ne peut être défini pour tout n.

– De plus, il est facile de vérifier par récurrence que, si x est irrationnel, les α_n et les y_n sont irrationnels ; en particulier, on ne peut pas avoir $y_n = 0$ et la suite (a_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$.

En conclusion : a_n existe pour tout n si et seulement si x est irrationnel.

I.9.

I.9.a. On a bien $a_0 = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et on montre comme dans **I.7.a** que, pour $n \geqslant 1$, on a $\alpha_n > 1$. Donc $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor \in \mathbb{N}^*$, et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien dans S.

I.9.b. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $x = [a_0, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$.

– Pour $n=0$, $[a_0, \alpha_1] = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1} = a_0 + y_0 = \alpha_0 = x$, la propriété est vérifiée.

– Supposons l'égalité vraie au rang n. Alors :

$$\begin{aligned} x &= [a_0, \dots, a_n, \alpha_{n+1}] = [a_0, \dots, a_n, a_{n+1} + y_{n+1}] \\ &= \left[a_0, \dots, a_n, a_{n+1} + \frac{1}{\alpha_{n+2}}\right] = [a_0, \dots, a_n, a_{n+1}, \alpha_{n+2}] \end{aligned}$$

d'après la propriété rappelée par l'énoncé, ce qui est le résultat cherché à l'ordre $n+1$.

I.9.c. Pour tout entier n, il est facile de vérifier que la fonction

$$\varphi_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto [a_0, \dots, a_n, x] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x}}}}$$

est décroissante si n est pair et croissante si n est impair (il suffit de faire une simple récurrence en remarquant que $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n\left(a_{n+1} + \dfrac{1}{x}\right)$, donc φ_{n+1} est la composée de φ_n et d'une fonction décroissante).

On aura donc, puisque φ_{2n-1} est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$r_{2n} \underbrace{=}_{\text{cf. I.5.}b} [a_0, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}] \leqslant [a_0, \dots, a_{2n-1}, \alpha_{2n}] \underbrace{=}_{\substack{\text{question}\\ \text{préc.}}} x$$

puisque $a_{2n} = \lfloor \alpha_{2n} \rfloor \leqslant \alpha_{2n}$.
L'inégalité $x \leqslant r_{2n+1}$ se démontre de la même façon en utilisant la décroissance de φ_{2n}.

I.9.d. On a vu à la question **I.4** que la suite (r_n) converge vers $\mathrm{F}(a)$. D'après la question précédent, on a donc $x = \mathrm{F}(a)$, c'est-à-dire que pour tout irrationnel x la suite a construite au début de la question **I.7.** est telle que $\mathrm{F}(a) = x$; x a donc un antécédent dans S pat F, et F est surjective.

I.10. Pour $x = \sqrt{3} \approx 1,732$, $a_0 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$, $y_0 = \sqrt{3} - 1$, $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, $a_1 = 1$, $y_1 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, $\alpha_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$, $a_2 = 2$, $y_2 = \sqrt{3} - 1$.
Ainsi $y_2 = y_0$, donc ensuite $\alpha_3 = \alpha_1$, $a_3 = a_1$, $y_3 = y_1$ etc... La suite a est donc 2-périodique à partir du rang 1, et le développement en fraction continue de $\sqrt{3}$ s'écrit

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots\ldots].$$

II. APPROXIMATION DE LA FONCTION TANGENTE HYPERBOLIQUE PAR UNE SUITE DE FONCTIONS RATIONNELLES

A. Étude d'une suite de fonctions.

II.1. La fonction $t \mapsto -2tf_0(t) = -2t \operatorname{sh} t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc $f_1 : x \mapsto \displaystyle\int_0^x -2tf_0(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puisque c'en est la primitive qui s'annule en 0.
Si l'on suppose f_n de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, le même raisonnement montre que f_{n+1} est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ d'où le résultat demandé par récurrence sur n.

II.2. On fait de banales intégrations par parties ; pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \int_0^x \underbrace{-2t}_{=u}\,\underbrace{\operatorname{sh} t}_{=v'}\,\mathrm{d}t = \big[-2t \operatorname{ch} t\big]_0^x - \int_0^x \underbrace{(-2)}_{=u'}\,\underbrace{\operatorname{ch} t}_{=v}\,\mathrm{d}t = -2x \operatorname{ch} x + 2\int_0^x \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t = -2x \operatorname{ch} x + 2 \operatorname{sh} x$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \int_0^x \underbrace{4t^2}_{=u}\,\underbrace{\operatorname{ch} t}_{=v'}\,\mathrm{d}t - 4\int_0^x t \operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t = \big[4t^2 \operatorname{sh} t\big]_0^x - \int_0^x \underbrace{8t}_{=u'}\,\underbrace{\operatorname{sh} t}_{=v}\,\mathrm{d}t - 4\int_0^x t \operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t \\ &= 4x^2 \operatorname{sh} x - 12\int_0^x t \operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t = 4x^2 \operatorname{sh} x + 6f_1(x) = 4x^2 \operatorname{sh} x - 12x \operatorname{ch} x + 12 \operatorname{sh} x. \end{aligned}$$

II.3. On démontre la relation proposée par récurrence sur n.

- Les calculs précédents montrent que l'égalité est vraie pour $n = 2$.
- Supposons que l'on ait, à un rang n donné, $f_n(x) = 2(2n-1)f_{n-1}(x) + 4x^2 f_{n-2}(x)$ pour tout x réel.
Puisque les deux fonctions f_{n+1} et $x \mapsto 2(2n+1)f_n(x) + 4x^2 f_{n-1}(x)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et s'annulent en 0, leur égalité (qui est la propriété à démontrer à l'ordre $n+1$) *équivaut* à l'égalité de leurs dérivées, c'est-à-dire de f'_{n+1} et de $x \mapsto 2(2n+1)f'_n(x) + 4x^2 f'_{n-1}(x) + 8xf_{n-1}(x)$.
Or d'une part : $f'_{n+1}(x) = -2xf_n(x)$ et, d'autre part :

$$\begin{aligned} 2(2n+1)f'_n(x) + 4x^2 f'_{n-1}(x) + 8xf_{n-1}(x) &= 2(2n+1)(-2xf_{n-1}(x)) + 4x^2(-2xf_{n-2}(x)) + 8xf_{n-1}(x) \\ &= 2(2n-1)(-2xf_{n-1}(x)) + 4x^2(-2xf_{n-2}(x)) \\ &= -2x\big(2(2n-1)f_{n-1}(x) + 4x^2 f_{n-2}(x)\big) \\ &= -2xf_n(x) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

L'égalité cherchée à l'ordre $n+1$ est donc bien établie.

II.4.

II.4.a. Soient P et Q deux polynômes tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Q}(x) \operatorname{sh} x - \mathrm{P}(x) \operatorname{ch} x = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{e}^x\big(\mathrm{P}(x) - \mathrm{Q}(x)\big) = \mathrm{e}^{-x}\big(\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)\big)$.
Par croissances comparées, le membre de droite de cette égalité tend vers 0 quand $x \to +\infty$. On a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\big(\mathrm{P}(x) - \mathrm{Q}(x)\big) = 0$, ce qui n'est possible que si $\mathrm{P} - \mathrm{Q}$ est le polynôme nul (car le produit d'un polynôme non nul par e^x tend vers $\pm\infty$ quand $x \to +\infty$).
Donc $\mathrm{Q} = \mathrm{P}$ puis $\mathrm{e}^{-x}\big(\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)\big) = 0$ pour tout x d'où $\mathrm{Q} = -\mathrm{P}$ et finalement $\mathrm{P} = \mathrm{Q} = 0$.

II.4.b et c.

• S'il existe des polynômes P_n et Q_n tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \mathrm{Q}_n(x)\operatorname{sh} x - \mathrm{P}_n(x)\operatorname{ch} x$, ils sont uniques d'après la question précédente : en effet, si l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Q}_n(x)\operatorname{sh} x - \mathrm{P}_n(x)\operatorname{ch} x = \mathrm{R}_n(x)\operatorname{sh} x - \mathrm{T}_n(x)\operatorname{ch} x \quad \text{avec } \mathrm{Q}_n, \mathrm{P}_n, \mathrm{R}_n, \mathrm{T}_n \text{ polynômes}$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\mathrm{Q}_n(x) - \mathrm{R}_n(x)\big)\operatorname{sh} x - \big(\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{T}_n(x)\big)\operatorname{ch} x = 0$$

d'où $\mathrm{Q}_n - \mathrm{R}_n = \mathrm{P}_n - \mathrm{T}_n = 0$.

• Démontrons l'existence de polynômes P_n et Q_n tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \mathrm{Q}_n(x)\operatorname{sh} x - \mathrm{P}_n(x)\operatorname{ch} x$ par récurrence sur n.

– Les calculs faits en **II.2** montrent que l'on a

$$\mathrm{P}_0 = 0\ ,\ \mathrm{Q}_0 = 1\ ,\ \mathrm{P}_1(x) = 2x\ ,\ \mathrm{Q}_1(x) = 2$$

ce qui établit la propriété pour $n = 0$ et $n = 1$.

– Supposons l'existence de ces polynômes établie aux rangs $n-1$ et $n-2$ pour $n \geqslant 2$. Alors

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) &= 2(2n-1)f_{n-1}(x) + 4x^2 f_{n-2}(x)\\ &= 2(2n-1)\big(\mathrm{Q}_{n-1}(x)\operatorname{sh} x - \mathrm{P}_{n-1}(x)\operatorname{ch} x\big) + 4x^2\big(\mathrm{Q}_{n-2}(x)\operatorname{sh} x - \mathrm{P}_{n-2}(x)\operatorname{ch} x\big)\\ &= \big[2(2n-1)\mathrm{Q}_{n-1}(x) + 4x^2\mathrm{Q}_{n-2}(x)\big]\operatorname{sh} x - \big[2(2n-1)\mathrm{P}_{n-1}(x) + 4x^2\mathrm{P}_{n-2}(x)\big]\operatorname{ch} x\end{aligned}$$

de sorte que l'on obtient la relation voulue en posant $\mathrm{P}_n(x) = 2(2n-1)\mathrm{P}_{n-1}(x) + 4x^2\mathrm{P}_{n-2}(x)$ et $\mathrm{Q}_n(x) = 2(2n-1)\mathrm{Q}_{n-1}(x) + 4x^2\mathrm{Q}_{n-2}(x)$, ces égalités définissant bien des polynômes .

II.4.d. Récurrence...

II.4.e. Là encore on démontre simultanément les deux propriétés par récurrence sur n.

– Elles sont facilement vérifiées pour $n = 0$ et $n = 1$.

– Supposons-les démontrées aux rangs $n-1$ et $n-2$ pour $n \geqslant 2$. Alors, compte tenu des relations trouvées en **II.4.c** :

$$\mathrm{Q}_n(0) = 2(2n-1)\mathrm{Q}_{n-1}(0) = 2(2n-1)\frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = \frac{(2n)(2n-1)}{n}\frac{2n-2)!}{(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!}$$

puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_n(x) &= 2(2n-1)\mathrm{Q}_{n-1}(x) + 4x^2\mathrm{Q}_{n-2}(x) \geqslant 2(2n-1)\mathrm{Q}_{n-1}(x) + 4x^2\mathrm{Q}_{n-2}(0)\\ &\geqslant 2(2n-1)\mathrm{Q}_{n-1}(x) \geqslant 2(2n-1)\mathrm{Q}_{n-1}(0) = \mathrm{Q}_n(0)\end{aligned}$$

ce qui démontre les deux propriétés à l'ordre n et achève la démonstration par récurrence.

B. Suite de fonctions rationnelles convergeant vers la fonction th .

II.5. On procède (encore...) par récurrence sur n.

– L'inégalité est immédiate pour $n = 0$.

– Si elle est vérifiée au rang n alors, pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}|f_{n+1}(x)| &\leqslant \int_0^x |2t f_n(t)|\ \mathrm{d}t \quad \text{(bornes « dans le bon sens » !)}\\ &\leqslant \int_0^x \frac{2t^{2n+1}}{n!}\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2\operatorname{sh} x}{n!}\int_0^x t^{2n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2\operatorname{sh} x}{n!}\frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité au rang $n+1$.

II.6. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\left|\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - \frac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{Q}_n(x)}\right| = \left|\frac{f_n(x)}{\operatorname{ch} x\mathrm{Q}_n(x)}\right| \leqslant \frac{x^{2n}}{n!}\operatorname{th} x\frac{1}{\mathrm{Q}_n(x)}$$

et puisque l'on a trouvé en **II.4.e.** : $\mathrm{Q}_n(x) \geqslant \dfrac{(2n)!}{n!}$ et que $\operatorname{th} x \leqslant 1$, on en déduit bien $\left|\operatorname{th} x - \dfrac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{Q}_n(x)}\right| \leqslant \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

II.7. Puisque les fonctions th et $x \mapsto \dfrac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{Q}_n(x)}$ sont impaires (cf. **II.4.d.**), on déduit de l'inégalité précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\operatorname{th} x - \frac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{Q}_n(x)}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}\,.$$

D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^{2n}}{(2n)!} = 0$ ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{Q}_n(x)} = \operatorname{th} x$ pour tout x réel.

C. Développement en fraction continue de $\operatorname{th}(1/2)$ et de e.

II.8.

II.8.a. Résulte immédiatement des relations trouvées en **II.4.c.**

II.8.b. Considérons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0$ et $a_n = 2(2n-1)$ pour $n \geqslant 1$. Cette suite est bien élément de S, et si l'on considère les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associées à a comme dans le début de la partie **I.**, elles vérifient les mêmes conditions initiales et les mêmes relations de récurrence que les suites $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ce sont donc les mêmes suites et par conséquent, la suite $\left(\dfrac{p'_n}{q'_n}\right)_n$ est exactement la suite des réduites associées à la suite a. Puisque cette suite converge vers $\operatorname{th}\dfrac{1}{2}$, on aura donc le développement en fraction continue $\operatorname{th}\dfrac{1}{2} = [a_0, a_1, \ldots]$ ou encore :

$$\operatorname{th}\frac{1}{2} = [0, 2, 6, 10, \ldots, 2(2n-1), \ldots]$$

II.9.

II.9.a. D'après la définition des réduites (**I.A.**), on a $y_n = b_n y_{n-1} + y_{n-2}$ d'où en particulier

$$y_{3n-2} = y_{3(n-1)+1} = y_{3n-3} + y_{3n-4}\ ,\ y_{3n-6} = y_{3(n-2)} = y_{3n-7} + y_{3n-8}\ ,\ y_{3n-3} = y_{3n-4} + y_{3n-5}$$

puis

$$\begin{aligned} y_{3n-2} - 2(2n-1)y_{3n-5} - y_{3n-8} &= (y_{3n-3} + y_{3n-4}) - 2(2n-1)y_{3n-5} - y_{3n-6} + y_{3n-7} \\ &= (2y_{3n-4} + y_{3n-5} - 2(2n-1)y_{3n-5} - y_{3n-6} + y_{3n-7} \end{aligned}$$

et puisque

$$y_{3n-5} = y_{3(n-2)+1} = y_{3n-6} + y_{3n-7} \quad \text{et} \quad y_{3n-4} = y_{3(n-2)+2} = [2(n-2)+2]y_{3n-5} + y_{3n-6}$$

on aboutit à

$$\begin{aligned} y_{3n-2} - 2(2n-1)y_{3n-5} - y_{3n-8} &= 2y_{3n-4} + 2y_{3n-5} - 2(2n-1)y_{3n-5} - 2y_{3n-6} \\ &= 2(2n-2)y_{3n-5} + 2y_{3n-6} - 2(2n-1)y_{3n-5} - 2y_{3n-6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer (ouf !). On obtient bien sûr la même relation pour les z_n.

II.9.b. Compte tenu des résultats de **II.8.a.** et de **II.9.a.**, on constate que les suites $\left(y_{3n-2}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(p'_n + q'_n\right)_{n\geqslant 1}$ vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre deux ; de plus, un peu de calcul donne $y_1 = 3 = p'_1 + q'_1$ et $y_4 = 19 = p'_2 + q'_2$, donc les deux suites coïncident pour tout entier $n \geqslant 1$.
Idem pour les suites $\left(z_{3n-2}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(q'_n - q'_n\right)_{n\geqslant 1}$.

II.9.c. On a vu dans la partie **I.** que la suite des réduites $\left(\dfrac{y_n}{z_n}\right)_n$ converge vers α. Il en est donc de même de la suite extraite $\left(\dfrac{y_{3n-2}}{z_{3n-2}}\right)_{n\geqslant 1}$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q'_n + p'_n}{q'_n - p'_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + \frac{p'_n}{q'_n}}{1 - \frac{p'_n}{q'_n}} = \dfrac{1 + \operatorname{th}\frac{1}{2}}{1 - \operatorname{th}\frac{1}{2}} = \mathrm{e}$ donc d'après **II.9.b** $\mathrm{e} = \alpha$, c'est-à-dire que le développement en fraction continue de e est précisément $[2, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots]$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆