PROBLEME 2 :

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1992

MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE

OPTIONS M ET P'

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHEMATIQUES I.

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte pages.

Dans tout le problème, on désigne par λ un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et par g la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x^{1-\lambda}\,(x-1)^{\lambda}} .$$

On se propose de déterminer une suite (v_n) de fractions rationnelles convergeant uniformément vers g sur tout intervalle compact de $]1, +\infty[$, ce qui fait l'objet de la partie III .

La partie II est consacrée à l'étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et la partie I au calcul, utile dans la suite, de l'intégrale $u_k = \displaystyle\int_0^1 t^k\,\omega(t)\,dt$, k désignant un entier naturel et ω la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$\omega(t) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi}\,\frac{1}{t^{1-\lambda}\,(1-t)^{\lambda}} .$$

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

4/5 1992

CONCOURS MINES-PONTS M et P'. M1

I - **Calcul de** $u_k = \displaystyle\int_0^1 t^k\, \omega(t)\, dt$:

On note $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\lambda}\,(1-t)^{\lambda}}$.

1. **Transformation de** $I(\lambda)$:

a) Etablir la convergence de $I(\lambda)$.

b) A l'aide d'un changement de variable homographique, montrer que :

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1-\lambda}\,(1+u)} .$$

c) En déduire l'expression de $I(\lambda)$ au moyen de $J(\lambda)$ et de $J(1-\lambda)$

où $J(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^{1-\lambda}\,(1+u)}$.

2. **Développement en série de** $I(\lambda)$:

a) Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $u \in [0, 1]$:

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, u^k + (-1)^n \frac{u^n}{1+u} .$$

En déduire une expression de $J(\lambda)$ comme somme d'une série convergente.

b) En déduire que : $\quad I(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + 2\lambda \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2}$.

3. **Calcul de** u_0 :

Soit f la fonction 2π-périodique telle que : $\quad \forall\, t \in [-\pi, +\pi] \quad f(t) = \cos(\lambda t)$.

a) f est-elle développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$?

b) Déterminer le développement en série de Fourier de f .

c) En déduire u_0 .

4. **Calcul de** u_k, $k \in \mathbb{N}^*$:

a) Prouver que, si $k \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_k = \dfrac{k+\lambda-1}{k}\, u_{k-1}$.

b) En déduire u_k .

5. Application au calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(t)}{x-t}\,dt$ pour $x > 1$:

a) Démontrer que, pour $x > 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(t)}{x-t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{x^{n+1}}$. (On procèdera comme au I-2.a) .)

b) Démontrer que la fonction g, définie dans l'introduction, est égale à la somme d'une série entière par rapport à $1/x$.

c) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(t)}{x-t}\,dt = g(x)$.

II - Etude d'un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$:

Dans toute la suite, on munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$(P,\ Q) \mapsto (P|Q) = \int_0^1 \omega(t)\ P(t)\ Q(t)\ dt$$

et de la norme euclidienne associée $P \mapsto \|P\| = \sqrt{(P|P)}$.

$\mathbb{R}[X]$ muni de ce produit scalaire sera noté $(\mathbb{R}[X],\ (|))$.
(On ne demande pas de vérifier que $(|)$ est un produit scalaire.)

1. Etude de la projection orthogonale de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour $n \geqslant 1$:

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $A_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k(n)\ X^k$ la projection orthogonale de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n−1) .

a) Montrer que la suite des réels $(a_0(n),\ a_1(n),\ \ldots,\ a_{n-1}(n))$ est solution du système

$$\forall\ p \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\}\ ,\quad \sum_{k=0}^{n-1} a_k(n) \prod_{i=k+1}^{n} \frac{i+p}{i+\lambda-1+p} = 1\ .$$

b) On associe à $A_n(X)$ la fraction rationnelle :

$$F(X) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(n) \prod_{i=k+1}^{n} \frac{i+X}{i+\lambda-1+X}\ .$$

Déterminer les zéros et les pôles de F ; que vaut $F(-n)$? En déduire :

$$F(X) = \prod_{p=0}^{n-1} \frac{n-\lambda-p}{n+p} \cdot \frac{X-p}{X+\lambda+p}\ .$$

c) En déduire la valeur de $a_{n-1}(n)$ coefficient dominant de $A_n(X)$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

4/5 1992

CONCOURS MINES-PONTS M et P' Math 1

2. Etude d'une famille orthogonale de polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

a) Démontrer qu'il existe une famille unique $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, vérifiant pour tout entier n, les propriétés suivantes :

i) le coefficient dominant de P_n est égal à 1 ,

ii) $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $(\mathbb{R}_n[X], (\,|\,))$.

Ecrire P_0 et P_1 et exprimer, pour $n \geqslant 1$, $P_n(X)$ en fonction de $A_n(X)$.

b) Norme de P_n pour $n \geqslant 1$:

Montrer que $\|P_n\|^2 = \left(X^n \mid X^n - A_n(X)\right) = u_{2n}\ F(n)$.

c) Racines de P_n pour $n \geqslant 1$:
Soit p le nombre des racines a_i d'ordre impair du polynôme P_n appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

Si $p = 0$, on pose $S(x) = 1$; sinon , on pose $S(x) = \prod_{i=1}^{p} (x - a_i)$.

Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 P_n(x)\ S(x)\ \omega(x)\, dx$ est nulle si $p < n$.

En déduire que P_n a n racines distinctes appartenant à $]0, 1[$.

d) Relation de récurrence vérifiée par $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe des réels α_n et β_n tels que :

$$X\ P_n = P_{n+1} + \alpha_n\ P_n + \beta_n\ P_{n-1} .$$

Calculer $(X\ P_n \mid P_{n+1})$ puis β_n en fonction de $\|P_{n-1}\|^2$, $\|P_n\|^2$ et de $\|P_{n+1}\|^2$.

Calculer α_n en fonction de n et de λ .

3. Application à l'étude de la famille de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ ,\ \forall\, x \geqslant 1 \qquad Q_n(x) = \int_0^1 \omega(t)\ \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t}\, dt .$$

a) Déterminer Q_0 et Q_1 et montrer que pour $n \geqslant 1$: $X\ Q_n = Q_{n+1} + \alpha_n\ Q_n + \beta_n\ Q_{n-1}$.

b) En déduire que $(P_n\ Q_{n+1} - P_{n+1}\ Q_n)\ \dfrac{1}{\|P_n\|^2}$ est indépendant de n et donner sa valeur.

III - Application à l'étude de la suite des fractions rationnelles $v_n = \dfrac{Q_n}{P_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Dans ce qui suit, x désigne un réel strictement supérieur à 1 .

1. Que vaut $v_0(x)$?
   Exprimer $v_{n+1}(x)$ en fonction de $v_n(x)$, $P_n(x)$ et $P_{n+1}(x)$.

2. a) Que vaut $\displaystyle\int_0^1 \omega(t)\, \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x}\, P_n(t)\, dt$?

   b) En déduire que : $\displaystyle g(x) - v_n(x) = \frac{1}{P_n(x)^2} \int_0^1 \omega(t)\, \frac{P_n(t)^2}{x - t}\, dt$.

3. Soit a un réel donné $a > 1$; il sera admis que l'application $< , >$:
   $\displaystyle (P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{a - t}\, P(t)\, Q(t)\, dt$ est un produit scalaire.

   L'espace euclidien ainsi défini sera noté : $(\mathbb{R}_n[X] , < , >)$ et la norme déduite du produit scalaire : $||| \ |||$.

   a) Soit $F_n(a)$ le sous-ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ nuls en a :
   $$F_n(a) = \{P \mid P \in \mathbb{R}_n[X] \ , \ P(a) = 0\} .$$

   Démontrer que $F_n(a)$ est l'hyperplan orthogonal au polynôme P_n dans $(\mathbb{R}_n[X] , < , >)$.

   b) Soit $G_n(a)$ le sous-ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ prenant la valeur 1 en a .

   Démontrer que $G_n(a)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$ obtenu à partir de $F_n(a)$ par une translation. Déterminer le vecteur translation lorsque ce vecteur est orthogonal à $F_n(a)$.

   En déduire l'égalité : $\displaystyle \inf_{P \in G_n(a)} |||P|||^2 = |||P_n|||^2 / P_n(a)^2$.

4. Convergence de la suite v_n :

   Déduire des résultats précédents, pour tout réel a , $a > 1$, l'inégalité :
   $$g(a) - v_n(a) \leqslant \frac{1}{a^2\, P_{n-1}(a)^2} \int_0^1 \frac{\omega(t)}{a - t}\, t^2\, P_{n-1}(t)^2\, dt .$$

5. Démontrer, pour tout réel a , $a > 1$, les inégalités : $0 \leqslant g(a) - v_n(a) \leqslant \dfrac{1}{a^{2n}}\, g(a)$.

   En déduire que la suite des fractions rationnelles v_n converge simplement vers g sur $]1, +\infty[$ et converge uniformément sur tout intervalle compact contenu dans $]1, +\infty[$.

FIN DU PROBLEME