CORRIGÉ PROBLÈME I (CCP PSI 2011)

I. Une étude de séries.

1.1 Etude de la fonction L.

1.1.1 $(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ est le terme général d'une suite de limite nulle si $|x|<1$ et non bornée si $|x|>1$. Par définition, le rayon de convergence de la série entière est donc égal à 1. L est donc définie au moins sur $]-1,1[$ et au plus sur $[-1,1]$.

Pour $x=1$, il y a convergence de la série (série de Riemann alternée ou critère spécial sur les séries alternées).
Pour $x=-1$, la série diverge (série harmonique). Ainsi

$$\boxed{L \text{ est définie sur }]-1,1].}$$

On reconnaît un développement usuel :

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[\ ,\ L(x)=\ln(1+x)\,.}$$

1.1.2 Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$: $f_n\ :\ x\mapsto \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

- Les f_n sont des fonctions continues sur $[0,1]$.
- Pour tout $x\in[0,1]$, $f_n(x)$ est le terme général d'une suite alternée, décroissante en module et de limite nulle. On peut donc dire que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ converge d'après le critère spécial et que, si on note $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ \forall x\in[0,1]\ ,\ |R_n(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}$$

  Ainsi, $\|R_n\|_\infty^{[0,1]}\leqslant\dfrac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\to}0$. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ est donc uniformément convergente sur $[0,1]$.

Par théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions,

$$\boxed{L\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})\,.}$$

En particulier,

$$\boxed{L(1)=\lim_{x\to1^-}L(x)=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)=\ln(2)\,.}$$

1.2 Étude de la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{k}\cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)$.

1.2.1 On découpe la somme en trois parties selon la congruence modulo 3 de l'indice puis on s'arrange pour retrouver tous les $\dfrac{1}{k}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3p}a_k &= \sum_{i=1}^{p}a_{3i}+\sum_{i=0}^{p-1}a_{3i+1}+\sum_{i=0}^{p-1}a_{3i+2}\\
&= -\sum_{i=1}^{p}\frac{2}{3i}+\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{3i+1}+\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{3i+2}\\
&= -3\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{3i}+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{3i}+\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{3i+1}+\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{3i+2}\\
&= -\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i}+\sum_{k=1}^{3p}\frac{1}{k}=\sum_{k=p+1}^{3p}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

(*Rem : on pouvait aussi faire une démonstration par récurrence sur* p).

On change alors d'indice $(h = k - p)$ et on factorise :

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = \sum_{h=1}^{2p} \frac{1}{p+h} = \frac{1}{p}\sum_{h=1}^{2p} \frac{1}{1+\frac{h}{p}}$$

1.2.2 • On fait ainsi apparaître une somme de Riemann associée à $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ sur $[0,2]$: en effet, les $\dfrac{h}{p}$ pour $1 \leqslant h \leqslant 2p$ forment une subdivision régulière de pas $\dfrac{1}{p}$ de l'intervalle $[0,2]$.

Comme la fonction est continue sur le segment, on peut appliquer le théorème sur les sommes de Riemann.

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = \frac{1}{p}\sum_{h=1}^{2p} \varphi\left(\frac{h}{p}\right) \underset{p\to+\infty}{\to} \int_0^2 \frac{dt}{1+t}$$

c'est à dire

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{3p} a_k = \ln(3).}$$

• En notant (A_n) la suite des sommes partielles de la série proposée, on a montré que $A_{3p} \to \ln(3)$. Comme $A_{3p+1} = A_{3p} + a_{3p+1}$ et $A_{3p+2} = A_{3p+1} + a_{3p+2}$ on a aussi convergence vers $\ln(3)$ des extraites (A_{3n+1}) et (A_{3n+2}). Nos trois extraites sont convergentes de même limite et « recouvrent » toute la suite des sommes partielles. On a donc convergence de la série avec

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \ln(3).}$$

1.2.3 Soit $u_k = \dfrac{1}{k}\cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)$. On a $u_{3p} = \dfrac{1}{3p}$, $u_{3p+1} = -\dfrac{1}{2(3p+1)}$ et $u_{3p+2} = -\dfrac{1}{2(3p+2)}$. Ainsi, $u_p = -\dfrac{a_p}{2}$.

La convergence de $\sum a_n$ entraîne celle de $\sum u_n$ et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = -\frac{1}{2}\ln(3) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).}$$

1.3 Étude des séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\cos(k\alpha)}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin(k\alpha)}{k}$.

1.3.1 $S_n(t)$ est la somme partielle d'une série géométrique de raison $e^{it} \neq 1$ et on a donc

$$S_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{n+1}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \varphi(t)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$$

1.3.2 On sait d'après le cours que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour $t \in [\pi, \alpha]$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1$ ne s'annule pas donc

$$\boxed{\varphi : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1} \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } [\pi, \alpha].}$$

1.3.3 Une intégration par parties donne

$$\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{n+1}\varphi(t)\right]_\pi^\alpha - \frac{1}{\mathrm{i}(n+1)}\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

φ et φ' sont continues sur le segment $[\pi, \alpha]$ et sont donc bornées sur ce segment. En notant M_0 et M_1 des majorants sur ce segment de $|\varphi|$ et $|\varphi'|$, on a alors

$$\left|\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{n+1}\varphi(t)\right]_\pi^\alpha\right| = \frac{1}{n+1}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}\varphi(\alpha) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\pi}\varphi(\pi)\right| \leqslant \frac{1}{n+1}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}\right||\varphi(\alpha)| + \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\pi}\right||\varphi(\pi)| \leqslant \frac{2M_0}{n+1}$$

et

$$\left|\frac{1}{\mathrm{i}(n+1)}\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n+1}\int_\pi^\alpha \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\right||\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\int_\pi^\alpha |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(\alpha-\pi)M_1}{n+1}$$

d'où

$$\left|\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2M_0}{n+1}+\frac{(\alpha-\pi)M_1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (\textit{lemme de Lebesgue}).}$$

Rem : je rappelle, car beaucoup semblent l'avoir oublié, que, pour tout θ réel, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = 1$ *!!...*

1.3.4 Par linéarité de l'intégration, on a

$$\int_\pi^\alpha S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}}{\mathrm{i}k} = \frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{k=1}^n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}}{k} - \frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{k}$$

Le second terme du membre de droite tend vers $\mathrm{i}\ln(2)$ (question **1.2**). On a aussi

$$\int_\pi^\alpha S_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_\pi^\alpha \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t - \int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

qui tend vers $-\displaystyle\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ quand $n\to+\infty$ (question **3.3**). On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}}{k} = -\ln(2) - \mathrm{i}\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui prouve la convergence de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}}{k}$ et donne la somme de la série.

1.3.5 On a, pour $t\neq 0[2\pi]$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\varphi(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}}{2\mathrm{i}\sin(t/2)}$$

1.3.6 En passant aux parties réelle et imaginaire dans le résultat de la question **3.4** on en déduit que les séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{\cos(k\alpha)}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{\sin(k\alpha)}{k}$ convergent et que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(k\alpha)}{k} &= -\ln(2) - \int_\pi^\alpha \mathcal{R}e\,(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\varphi(t))\,\mathrm{d}t\\ &= -\ln(2) - \int_\pi^\alpha \frac{\cos(t/2)}{2\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t\\ &= -\ln(2) - [\ln(|\sin(t/2)|)]_\pi^\alpha\\ &= -\ln(2\sin(\alpha/2))\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(k\alpha)}{k} = -\int_\pi^\alpha \mathcal{I}m\,(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\varphi(t))\,\mathrm{d}t = -\int_\pi^\alpha\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{\pi-\alpha}{2}$$

Le résultat est cohérent avec celui de **2.3** puisque $2\sin(\pi/3)=\sqrt{3}$ ($2\pi/3$ n'est pas dans $[\pi,2\pi[$ mais l'hypothèse importante dans ce qui précède est seulement $\alpha/2\in]0,\pi[\ldots$).

II. Limite d'une intégrale.

2.1 Existence de $\tilde{f}_g(x)$.

2.1. On notera M un majorant de $|g|$ sur $\mathbb{R}^+$.
Soit $x\geqslant 0$. $t\mapsto f(t)g(xt)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et le seul problème d'intégrabilité est celui au voisinage de $+\infty$. Or, $|f(t)g(x,t)|\leqslant M|f(t)|$ et le majorant est intégrable au voisinage de $+\infty$. La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et a fortiori, son intégrale $\tilde{f}_g(x)$ existe. De plus

$$\forall x\geqslant 0,\ |\tilde{f}_g(x)|\leqslant M\int_0^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

ce qui montre que $\tilde{f}_g$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

- $\forall x \geqslant 0,\ t \mapsto f(t)g(xt)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall t \geqslant 0,\ x \mapsto f(t)g(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall t \geqslant 0,\ |f(t)g(xt)| \leqslant M|f(t)|$. Le majorant est indépendant de x et est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

$$\boxed{\tilde{f}_g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+).}$$

Remarque : il n'y a pas de raison d'exclure le cas $x = 0$ dans cette question, comme l'a fait l'énoncé.

2.2 Limite de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = e^{\mathrm{i}t}$.

2.2.1. D'après l'existence de l'intégrale de $|f|$ sur $\mathbb{R}^+$, on a $\displaystyle\int_0^a |f(t)|\,\mathrm{d}t$ qui tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ quand $a \to +\infty$ (c'est la définition d'une intégrale impropre convergente). En revenant à la définition de la limite, on a donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \geqslant 0 \text{ tq } \forall a \geqslant A,\ \left|\int_0^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t - \int_0^a |f(t)|\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{soit} \quad \left|\int_a^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

ce qui implique le résultat demandé.

2.2.2. Une intégration par parties donne, pour $x > 0$,

$$\int_0^A f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t = \frac{f(A)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xA} - f(0)}{\mathrm{i}x} - \frac{1}{\mathrm{i}x}\int_0^A f'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t$$

f' est continue sur le segment $[0, A]$ et donc bornée sur ce segment. Une majoration simple donne alors

$$\left|\int_0^A f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|f(A)| + |f(0)|}{x} + \frac{A\|f'\|_\infty^{[0,A]}}{x}$$

Le majorant étant de limite nulle quand $x \to +\infty$, on a donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_0^A f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t = 0.}$$

2.3. Soit $\varepsilon > 0$, et soit A comme dans la question **2.1**. La question **2.2** donne alors, par définition de la limite, un x_0 tel que, pour $x \geqslant x_0$, $\left|\displaystyle\int_0^A f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$. On a alors

$$\forall x \geqslant x_0,\ \left|\tilde{f}_g(x)\right| \leqslant \left|\int_0^A f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| + \int_A^{+\infty} |f(t)| \leqslant 2\varepsilon$$

Par définition des limites, on a donc montré que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \tilde{f}_g(x) = 0.}$$

2.2 Étude pour une fonction f particulière.

2.3.1. On peut procéder par double intégration par parties ou, mieux, utiliser l'exponentielle complexe :

$$\theta(\gamma) = \mathcal{I}m\left(\int_0^\pi \mathrm{e}^{y(\gamma+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}y\right) = \mathcal{I}m\left(\frac{-\mathrm{e}^{\pi\gamma} - 1}{\gamma + \mathrm{i}}\right) = \frac{1 + \mathrm{e}^{\pi\gamma}}{1 + \gamma^2}$$

2.3.2. Le changement de variable $u = tx$, qui réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ (puisque $x > 0$) donne directement

$$\tilde{E}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u/x}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u$$

2.3.3. Le changement de variable $v = u - k\pi$ donne

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-\frac{v+k\pi}{x}}|\sin(v)|\,\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}\theta\left(-\frac{1}{x}\right)$$

2.3.4. La série proposée est une série géométrique de raison $e^{-\frac{\pi}{x}}$. Sa raison est dans $]-1,1[$; la série converge donc et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}} = \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{x}}}$$

2.3.5. $\tilde{E}(x)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u$. D'après la relation de Chasles et avec les questions précédentes, on a donc

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}\theta\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+\pi^2}\frac{1+\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}}$$

Quand $x \to +\infty$, on a $1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}} \sim \dfrac{\pi}{x}$ et $1+\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}} \to 2$, ce qui permet d'obtenir

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \tilde{E}(x) = \frac{2}{\pi}.}$$

2.4 Étude générale.

2.4.1. Notons $h_k\ :\ t \mapsto \dfrac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$. (h_k) est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et $\|h_k\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{4k^2-1}$ qui est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions $\sum h_k$ est ainsi normalement, donc uniformément, convergente sur $\mathbb{R}$ et, par théorème de continuité des sommes de séries de fonctions,

$$\boxed{h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+).}$$

$|\sin|$ est π-périodique et paire. Ses coefficients de Fourier « en sinus » sont nuls et ceux « en cosinus » valent

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k(|\sin|) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin(t)|\cos(2kt)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4k^2}$$

(*Pour le calcul de l'intégrale, on peut supprimer la valeur absolue et on utilise la formule* $\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin(a)$ c

Comme $|\sin|$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, elle est somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ |\sin(t)| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{1-4k^2}\cos(2kt) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}h(t).}$$

2.4.2. On a ainsi $\tilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\left(\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}h(xt)\right)\,\mathrm{d}t$ et comme f est intégrable, on peut découper l'intégrale en deux pour obtenir

$$\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t$$

$x > 0$ étant fixé, par définition de h, on a

$$\forall t \geqslant 0,\ f(t)h(xt) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f(t)\cos(2kxt)}{4k^2-1}$$

$H_k\ :\ t \mapsto \dfrac{f(t)\cos(2kt)}{4k^2-1}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\sum H_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $t \mapsto f(t)h(xt)$ elle même continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus $|H_k(t)| \leqslant \dfrac{|f(t)|}{4k^2-1}$ montre que H_k est intégrable avec

$$\int_0^{+\infty} |H_k(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

qui est le terme général d'une série convergente. Le théorème d'interversion série-intégrale lorsqu'il y a convergence en norme 1 s'applique donc et permet d'écrire que

$$\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(t)\cos(2kxt)}{4k^2-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t\right)$$

Posons maintenant $F_k(x) = \dfrac{1}{4k^2-1}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} f(\frac{u}{2k})\cos(ux)\,\mathrm{d}u$ (on a posé $u = 2kt$).

- D'après la partie **2.2**, comme $u \mapsto f\left(\dfrac{u}{2k}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors $F_k(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ (on passe du résultat avec e^{ix} à celui avec $\cos(x)$ en passant à la partie réelle).
- $\forall x > 0,\ |F_k(x)| \leqslant \dfrac{1}{4k^2-1}\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$. Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions $\sum F_k$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}^{+*}$ (et donc au voisinage de $+\infty$).

Le théorème de double limite s'applique donc et implique que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t = 0$$

En combinant tout cela on obtient finalement que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$, ceci est compatible avec le résultat pour $\tilde{E}$.

2.4.3.

2.4.3.1 Il suffit de poser $u = xt$ pour obtenir

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)|\,du$$

Par définition de p et q, on a $p\pi \leqslant \beta x < (p+1)\pi$ et $q\pi \leqslant \delta x < (q+1)\pi$.
Si $x > \dfrac{\pi}{\delta-\beta}$ alors $\delta x - \beta x > \pi$; or, $q\pi - (p+1)\pi > \delta x - \beta x$ et donc $q - p + 1 > 1$ ou encore $q > p$.
On effectue, avec la relation de Chasles, le découpage suivant :

$$xF(x) = \int_{\beta x}^{(p+1)\pi} |\sin(u)|\,\mathrm{d}u + \sum_{k=p+1}^{q-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)|\,\mathrm{d}u + \int_{q\pi}^{\delta x} |\sin(u)|\,\mathrm{d}u$$

Par π-périodicité de $|\sin|$, le terme du milieu vaut $(q-p-1)\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin(u)|\,\mathrm{d}u = 2(q-p-1)$. On peut alors minorer les premier et troisième termes par 0, et les majorer par l'intégrale de $|\sin|$ sur une période complète d'où

$$2(q-p-1) \leqslant xF(x) \leqslant 2[(q-p-1)+2] = 2(q-p+1)$$

De plus $\dfrac{\delta x}{\pi} - 1 - \dfrac{\beta x}{\pi} - 1 \leqslant q - p - 1 \leqslant \dfrac{\delta x}{\pi} - \dfrac{\beta x}{\pi}$ et donc

$$\frac{2(\delta-\beta)}{\pi} - \frac{2}{x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{2(\delta-\beta)}{\pi} + \frac{4}{x}$$

Par théorème d'encadrement, on a finalement

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{2}{\pi}(\delta-\beta).}$$

2.4.3.2

- Si f est en escalier sur $J = [a,b]$, il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ telle que f est constante (égale à c_i) sur $]a_i, a_{i+1}[$. On a alors

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} c_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\sin(xt)|\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\to} \sum_{k=0}^{p-1} c_k \frac{2(a_{k+1}-a_k)}{\pi}$$

Par ailleurs,

$$\int_J f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{p-1} c_k(a_{k+1}-a_k)$$

et finalement,

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, f est uniformément approchable sur $[a,b]$ par une suite de fonctions en escalier. Soit $\varepsilon > 0$; il existe φ, fonction en escalier, telle que $\|f-\varphi\|_\infty^J \leqslant \varepsilon$. D'après le premier cas, il existe x_0 tel que si $x > x_0$, $\left|\tilde{\varphi}(x) - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_J \varphi\right| \leqslant \varepsilon$. Pour $x > x_0$, on a alors

$$\left|\tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,\mathrm{d}t\right| \quad\leqslant\quad \left|\tilde{f}(x) - \tilde{\varphi}(x)\right| + \left|\tilde{\varphi}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J \varphi\right| + \left|\frac{2}{\pi}\int_J \varphi - \frac{2}{\pi}\int_J f\,\mathrm{d}t\right|$$

Par choix de x, le second morceau est plus petit que ε. Le troisième est plus petit que $\dfrac{2}{\pi}|b-a|\varepsilon$. Le premier est majoré par $\displaystyle\int_a^b |f(t)-\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$ et donc par $(b-a)\varepsilon$. On a donc

$$\left|\tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\frac{2}{\pi}|b-a| + |b-a| + 1\right)\varepsilon$$

En revenant à la définition des limites, on a montré que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

- Supposons f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. Soit $\varepsilon > 0$; comme en **2.1** on trouve un A tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$. D'après le cas précédent, il existe x_0 tel que si $x > x_0$ on a $\left|\displaystyle\int_0^A f(t)|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t - \dfrac{2}{\pi}\int_0^A f\right| \leqslant \varepsilon$. Pour $x > x_0$, on a alors

$$\left|\tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_A^{+\infty} |f(t)| + \left|\int_0^A f(t)|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_0^A f\right| + \frac{2}{\pi}\int_A^{+\infty} |f|$$

Avec les choix faits, on a alors

$$\left|\tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(2 + \frac{2}{\pi}\right)\varepsilon$$

En revenant à la définition des limites, on a montré que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$
