CORRIGÉ PROBLÈME II (CENTRALE PC 2011)

Partie I : Intervention de séries entières

I.A Résultat du cours concernant les séries entières sur l'ouvert de convergence.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-\delta, \delta[, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)....(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

$$f^{(k)}(0) = k! a_k$$

I.B Exemples

I.B 1) Si f existe, pour tout n, $a_n = \dfrac{u_n}{n!} = \dfrac{2^n}{n!}$.

Sur un ouvert à déterminer $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = e^{2x}$. Le rayon de convergence est $R = +\infty$ et la fonction trouvée est solution sur n'importe quel intervalle $]-\delta, \delta[$ avec $\delta > 0$.

I.B 2) Idem : $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (2p)! x^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-x^2)^p = \frac{1}{1+x^2}$ si $|x| < 1$ (série géométrique).

Ici $R = 1$, on choisit $\delta \in]0, 1[$.

I.C La solution éventuelle est la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)! x^n}{n!}$.

Pour $x \neq 0$, notons $v_n = \dfrac{(2n)! x^n}{n!}$; pour tout n, $v_n \neq 0$ et $\dfrac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = 2(2n+1)|x| \to +\infty$. La série diverge d'après le critère de d'Alemebert et $R = 0$.

On ne peut donc trouver de $\delta > 0$.

Partie II : Le théorème de Borel

II.A Une fonction en cloche.

II. A. 1) a) Notons $F : x \mapsto \dfrac{1}{x(x-1)}$ de sorte que $g = e^F$. La restriction de g à $]0, 1[$ est composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, 1[$.

Montrons la formule demandée par récurrence sur p.

- $p = 0$: $\forall x \in]0, 1[$, $g^{(0)}(x) = g(x) = \dfrac{e^{F(x)}}{(x(x-1))^{2\times 0}} Q_0(x)$ avec $Q_0(x) = 1$.
- Supposons la formule vraie pour un entier p donné : $\forall x \in]0, 1[$:

$$g^{(p+1)}(x) = (g^{(p)})'(x) = \frac{Q_p'(x)(x(x-1))^{2p} - Q_p(x) 2p (x(x-1))^{2p-1}(2x-1)}{(x(x-1))^{4p}} e^{F(x)} + R(x)$$

$$\text{avec } R(x) = \frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} e^{F(x)} F'(x) \quad \text{où } F'(x) = \frac{-(2x-1)}{(x(x-1))^2}$$

En regroupant :

$$g^{(p+1)}(x) = e^{F(x)} \frac{Q_p'(x)(x(x-1))^2 - 2p Q_p(x)(2x-1)(x(x-1)) - (2x-1)Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p+2}}$$

On obtient bien :

$$g^{(p+1)}(x) = \frac{Q_{p+1}(x)}{(x(x-1))^{2(p+1)}} e^{F(x)}$$

où Q_{p+1} est la fonction polynôme définie par :

$$Q_{p+1}(x) = Q_p'(x) x^2 (x-1)^2 - (2x-1) Q_p(x) \left(2px(x-1) + 1\right)$$

ce qui est le résultat voulu à l'ordre $p+1$.

b) Montrons par récurrence sur p que Q_p est de degré $3p - 2$ si $p \geqslant 1$.

- $p=1$: $Q_1(x)=-(2x-1)$, $\deg(Q_1)=1=3\times 1-2$.
- Supposons Q_p de degré $3p-2$.
  Notons C_p son coefficient dominant, $C_p\neq 0$.
  Q_{p+1} apparaît comme la somme de deux polynômes de degrés $(3p-2)-1+4=3p+1$ pour le premier et $3p-2+3=3p+1$ pour le deuxième.
  Le terme dominant de la somme est :
  $C_p(3p-2-4p)x^{3p+1}=C_p(-p-2)x^{3p+1}\neq 0$, donc $\deg(Q_{p+1})=3p+1=3(p+1)-2$ et la formule est vraie au rang $p+1$.

c) Une procédure peut être :

```
Calcul:=proc(n)
local k,E;
if n=0 then 1 else
   E:=1;
   for k from 1 to n do
      E:=diff(E,X)* X^2 *(X-1)^2-(2*X-1)*E*(2*(k-1)*X*(X-1)+1)
   od;
 simplify(E)
 fi
 end proc;
```

II. A. 2) La fonction $F: x\mapsto \dfrac{1}{x(x-1)}$ est croissante sur $]0,1/2]$, décroissante sur $[1/2,1[$ de limite égale à $-\infty$ en 0^+ et 1^-.

a) Par composition de limites :

$$\forall r\in\mathbb{N},\ \lim_{x\to 0^+} e^{F(x)}F(x)^r=\lim_{X\to-\infty} e^X X^r=0$$

Comme Q_p est une fonction polynôme, elle a une limite finie en 0. En utilisant la formule définissant $g^{(p)}$ on a

$$\lim_{x\to 0^+} g^{(p)}(x)=0$$

Même étude en 1^-.

b) On dispose du théorème de prolongement du caractère dérivable d'une fonction : si f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$ et si f' admet une limite en a alors f et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.

On applique ce théorème à la restriction de g à $[0,1/2]$. g est continue sur $[0,1/2]$ car $\lim_{x\to 0^+} g(x)=0$ et $g(0)=0$, g est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1/2]$ et $\lim_{x\to 0^+} g'(x)=0$.
Comme g est nulle à gauche de 0, g est continue en 0, est dérivable à droite et à gauche en 0 avec $g'_g(0)=g'_d(0)=0$. g est dérivable en 0 avec $g'(0)=0$. g est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,1/2]$.

Ce même théorème et la même démarche s'appliquent successivement à g', g'',..., $g^{(k)}$ ...et on montre ainsi que g est classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty,1/2]$. Même étude en 1.

En conclusion, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[0,1]$: $g\in\mathcal{W}$.

II.B Une fonction en plateau

II.B 1) La fonction g est continue positive et non égale à la fonction nulle sur $[0,1]$. Son intégrale sur $[0,1]$ est strictement positive. Notons $K=\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$. g de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ admet une primitive G sur $\mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\frac{G(1)-G(x-1)}{K}$$

Ceci montre que h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Prenons $G: x\mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)dt$. Comme g est nulle à l'extérieur de $[0,1]$, si $x\leqslant 0, G(x)=0$ et si $x\geqslant 1, G(x)=\displaystyle\int_0^1 g(t)dt+\int_1^x g(t)dt=K+0=K$.Donc :

- Si $x\leqslant 1$, $x-1\leqslant 0$ et $h(x)=K/K=1$.
- Si $x\geqslant 2$, $x-1\geqslant 1$ et $h(x)=(K-K)/K=0$.

Comme pour tout x, $h'(x)=-g(x-1)$, h est strictement décroissante sur $[0,1]$.

II.B 2) $\varphi(x) = h(2x)h(-2x)$.

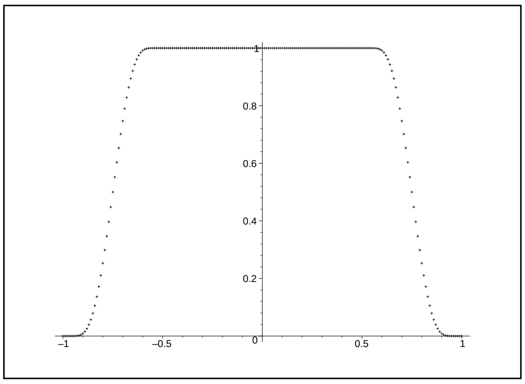
a) φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par composition et produit.
En utilisant la formule de Leibniz :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k h^{(k)}(2x)(-2)^{n-k} h^{(n-k)}(-2x)$$

h est constante sur $]-\infty, 1]$. Toutes ses dérivées successives sont égales à 0 sur cet intervalle. En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, h^{(n)}(0) = 0$. Il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi^{(n)}(0) = h(0)(-2)^n h^{(n)}(0) = 0$$

b) Par construction φ est paire. Pour $x \geqslant 1$, $2x \geqslant 2$ et $h(2x) = 0$ d'où $\varphi(x) = 0$.
Par parité si $x \leqslant -1$, $\varphi(x) = 0$.
On étudie h sur $[0, 1]$: si $x \geqslant 0$, $-2x \leqslant 0$ et $h(-2x) = 1$ d'où $\varphi(x) = h(2x)$.
φ est constante, égale à 1 sur $[0, 1/2]$, décroissante sur $[1/2, 1]$.



c) $\left|\varphi^{(k)}\right|$ est continue sur le compact $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est donc bornée sur ce segment et les bornes sont atteintes. D'où l'existence de $\max\limits_{x\in[0,1]} \left[\varphi^{(k)}(x)\right| = \sup\limits_{[0,1]} \left|\varphi^{(k)}\right|$.
λ_p est le plus grand de p réels.

II.C Le théorème de Borel. $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_0(x) = \varphi(x) \quad \text{et si} \quad n \geqslant 1,\ g_n(x) = \frac{x^n}{n!}\varphi(\beta_n x) \quad \text{avec } \beta_n = \max(1, 4^n |u_n| \lambda_n)$$

II.C 1) a) g_n est produit et composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Si $|X| \geqslant 1$, $\varphi(X) = 0$ donc si $|\beta_n x| \geqslant 1$, $g_n(x) = 0$.

II.C 2) $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ avec $j < n$.

a) On peut appliquer la formule de Leibniz. Notons $f_1 : x \mapsto \varphi(\beta_n x)$ et $f_2 : x \mapsto x^n$. Pour $i \leqslant j < n$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1^{(i)}(x) = \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x)\ \ f_2^{(j-i)}(x) = n(n-1)...(n-(j-i)+1)x^{n-(j-i)}$$

En appliquant la formule de Leibniz et en divisant par $n!$ il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}$$

b) Pour tout entier $p \geqslant 1$, $\varphi^{(p)}(0) = 0$. Par suite :
$g_n^{(j)}(0) = \beta_n^0 \varphi(0) \dfrac{0^{n-j}}{(n-j)!} = 0$ car $n - j > 0$.

c) Si $|x| > 1/\beta_n$, la fonction g_n est nulle sur un intervalle ouvert de centre x. Toutes ses dérivées sont égales à 0 en ce point. Le résultat reste vrai en $\pm 1/\beta_n$ par continuité de toutes les dérivées.

d) Si $|\beta_n x| \leqslant 1$, comme $(n-j+i)! \geqslant 1$ et $j \leqslant n-1$ on a :

$$|g_n^{(j)}(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \sup_{[0,1]} |\varphi^{(i)}| (1/\beta_n)^{n-j+i} \leqslant \lambda_n \beta_n^{j-n} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}$$

De plus $n-j \geqslant 1$ et $1 \leqslant \beta_n$ donc $1 \leqslant \beta_n \leqslant \beta_n^{n-j}$ et $\beta_n^{j-n} \leqslant \beta_n^{-1}$.
Enfin, par définition de β_n, $4^n|u_n|\lambda_n \leqslant \beta_n$. On obtient :

$$|u_n g_n^{(j)}(x)| \leqslant |u_n|\lambda_n \frac{1}{\beta_n}2^j \leqslant \frac{2^j}{4^n} \leqslant \frac{2^{n-1}}{2^{2n}} = 2^{-n-1}$$

II.C 3) La formule de Leibniz s'applique encore mais pour $j > n$ la dérivée d'ordre j de $x \mapsto x^n$ est nulle. On a alors :

$$\forall j \geqslant n, \forall x \in \mathbb{R},\ \ g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=j-n}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}$$

avec la convention , pour tout x, $x^0 = 1$.
Pour $j = n$, $g_n^{(n)}(0) = \varphi(0)\frac{1}{1} = 1$. Pour $j > n$ tous les termes de la somme sont nuls.

$$\forall (n,j) \in \mathbb{N}^2,\ g_n^{(j)}(0) = \delta_{i,j}$$

II.C 4) Notons pour cette question $f_n : x \mapsto u_n g_n(x)$. Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Fixons j dans $\mathbb{N}$ et prenons $n \geqslant j$. En utilisant les majorations précédentes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ |f_n^{(j)}(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et donc} \quad \sup_{\mathbb{R}} |f_n^{(j)}| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{pour tout } n \geqslant j$$

Toutes les séries de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$. On dispose du théorème suivant : si $\sum F_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ qui converge simplement sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle que $\sum F_n'$ converge normalement sur I, alors la somme F de $\sum F_n$ est $\mathscr{C}^1$ sur I de dérivée la somme de la série $\sum F_n'$. On applique ce théorème à $\sum f_n$ et à toutes les séries dérivées successives. La fonction σ ainsi définie est de classe $Cinf$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \ \sigma^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n^{(j)}(x)$$

En particulier :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \ \sigma^{(j)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n^{(j)}(0) = u_j \times 1 = u_j$$

Partie III : Un autre élément de $\mathcal{W}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, de limite 0 telle que $\sum a_n$ converge.

III.A $f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2}\left(|x+a_0| + |x-a_0| - 2|x|\right)$.

III.A.1) Étudions les différents cas :

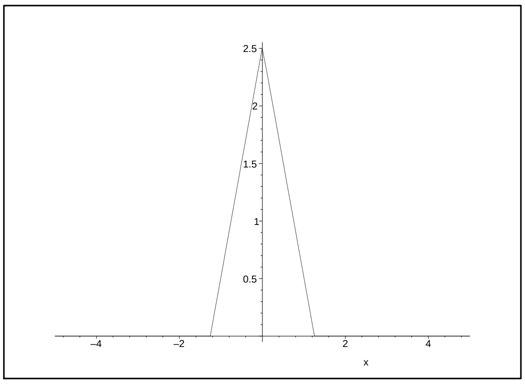
– Si $x \leqslant -a_0$, $f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2}\left(-x-a_0-x+a_0-2(-x)\right) = 0$.

– Si $x \in [-a_0, 0]$, $f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2}\left(x+a_0-x+a_0+2x\right) = \frac{x+a_0}{a_0^2}$.

– Si $x \in [0, a_0]$, $f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2}\left(x+a_0-x+a_0-2x\right) = \frac{-x+a_0}{a_0^2}$.

– Si $x \geqslant a_0$, $f(x) = \frac{1}{2a_0^2}\left(x+a_0+x-a_0-2x\right) = 0$.

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f_0 est somme de composée de fonctions continues : elle est continue. Un exemple de graphe :



III.A.2) L'étude précédente montre que f_0 est positive, croissante sur $\mathbb{R}^-$, décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ |f_0(x)| \leqslant |f_0(0)| = \dfrac{1}{a_0}$.

b) Pour $x \neq y$, $\dfrac{f_0(y) - f_0(x)}{y - x}$ est le coefficient directeur (pente) de la droite qui joint les points $M_0(x, f(x))$ et $M_1(y, f(y))$. On constate que la valeur absolue de ce coefficient est majorée par $1/a_0^2 = k$, donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f_0(x) - f_0(y)| \leqslant k|x - y|$$

III.B $f_1(x) = \dfrac{1}{2a_1} \displaystyle\int_{x-a_1}^{x+a_1} f_0(t)dt$

III. B. 1) f_0 continue sur $\mathbb{R}$ admet sur $\mathbb{R}$ une primitive F_0 de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{F_0(x + a_1) - F_0(x - a_1)}{2a_1} \quad \text{donc} \quad f_1'(x) = \frac{f_0(x + a_1) - f_0(x - a_1)}{2a_1}$$

III. B. 2) Étudions deux cas :

– si $x \leqslant -a_0 - a_1$, alors $x + a_1 \leqslant -a_0$ et f_0 est nulle sur $[x - a_1, x + a_1]$ d'où $f_1(x) = 0$.

– si $x \geqslant a_0 + a_1$, alors $x - a_1 \geqslant a_0$ et f_0 est nulle sur $[x - a_1, x + a_1]$ d'où $f_1(x) = 0$.

III. B. 3) $\forall x \in \mathbb{R},\ x - a_1 \leqslant x + a_1$ donc

$$|f_1(x)| \leqslant \frac{1}{2|a_1|} \int_{x-a_1}^{x+a_1} |f_0(t)|dt \leqslant \frac{1}{2a_1} \int_{x-a_1}^{x+a_1} \frac{1}{a_0}dt = \frac{1}{a_0}$$

Comme f_0 est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$, la formule donnant f_1' obtenue en III.B.1 donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_1'(x)| \leqslant \frac{1}{2a_1} k|2a_1| = k$$

Comme la suite des a_n est décroissante on a :
$0 < a_1 \leqslant a_0 \Rightarrow 0 < a_0 a_1 \leqslant a_0^2 \Rightarrow k = \frac{1}{a_0^2} \leqslant \frac{1}{a_1 a_0}$. D'où le résultat demandé.

III. B. 4) Application de l'inégalité des accroissements finis à f_1 entre x et y, (f_1 de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$)

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f_1(x) - f_1(y)| \leqslant \sup_{[x,y]} |f_1'| \times |x - y| \leqslant k|x - y|$$

III.C $f_n(x) = \dfrac{1}{2a_n} \displaystyle\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(t)dt$

III.C 1) Par récurrence. Avec $n \geqslant 1$: f_{n-1} est supposée de classe $\mathscr{C}^{n-1}$, donc possède une primitive F_{n-1} de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

$$f_n(x) = \frac{F_{n-1}(x + a_n) - F_{n-1}(x - a_n)1}{2a_n} \qquad f_n'(x) = \frac{f_{n-1}(x + a_n) - f_{n-1}(x - a_n)}{2a_n}$$

f_n est $\mathscr{C}^n$ par composition.

III.C.2) Par récurrence, f_{n-1} nulle en dehors de $[-S_{n-1}, S_{n-1}]$ entraîne f_n nulle en dehors de $[-S_{n-1} - a_n, S_{n-1} + a_n]$.

III.C.3) Montrons déjà par récurrence sur n que la fonction $f_n^{(n)}$ est toujours lipschitzienne de rapport k_n, avec $k_0 = k$ et pour tout $n > 0$, $k_n = \dfrac{k_{n-1}}{a_n}$.

On l'a démontré pour $n = 0$.

Supposons que pour $n \geqslant 1$, $f_{n-1}^{(n-1)}$ soit k_{n-1}-lipschitzienne. Par dérivations successives :

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x+a_n) - f_{n-1}^{(n-1)}(x-a_n)}{2a_n}$$

$$f_n^{(n)}(x) - f_n^{(n)}(y) = \frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x+a_n) - f_{n-1}^{(n-1)}(x-a_n)}{2a_n} - \frac{f_{n-1}^{(n-1)}(y+a_n) - f_{n-1}^{(n-1)}(y-a_n)}{2a_n}$$

Or $|f_{n-1}^{(n-1)}(x+a_n) - f_{n-1}^{(n-1)}(y+a_n)| \leqslant |x-y|\dfrac{k_{n-1}}{2a_n}$.

Avec deux inégalités on a bien

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f_n^{(n)}(x) - f_n^{(n)}(y)| \leqslant \frac{k_{n-1}}{a_n}|x-y|$$

D'où le résultat avec $k_n = \dfrac{1}{a_0^2 a_1 \dots a_n}$.

Démontrons alors le résultat demandé dans la question par récurrence toujours. Vrai pour $n = 0$, supposé vrai pour $n-1$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} \frac{1}{a_0}dt = \frac{1}{a_0}$$

On calcule facilement les dérivées successives et on utilise l'inégalité des accroissements finis jusqu'à la dérivée d'ordre $n-1$: :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall p, 0 < p \leqslant n-1,\ |f_n^{(p)}(x)| \leqslant \frac{1}{2a_n}\sup_{\mathbb{R}} |f_{n-1}^{(p)}| \times |2a_n| \leqslant \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_p}$$

Pour la dernière dérivée on utilise le fait que $f_{n-1}^{(n-1)}$ est lipschitzienne.

On obtient comme dans le calcul du début de cette question, mais en regroupant les termes en $x + a_n, x - a_n$ et $y + a_n, y - a_n$:

$$|f_n^{(n)}(x) - f_n^{(n)}(y)| \leqslant \frac{2}{2a_n}k_{n-1}|a_n| = \frac{1}{a_0^2 a_1 \dots a_{n-1}} \leqslant \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_n}$$

car la suite (a_n) est décroissante et donc $0 < a_n \leqslant a_0$

III.C.4) Récurrence encore avec accroissements finis.

III.C.5) On a pour tout n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant S < +\infty$. f_n est nulle à l'extérieur de $[-S_n, S_n]$ donc :

$$\int_{-S}^{S} f_n(t)dt = \int_{-S_n}^{S_n} f_n(t)dt = \frac{1}{2a_n}\int_{-S_n}^{S_n}\left(\int_{t-a_n}^{t+a_n} f_{n-1}(u)du\right)dt = \frac{1}{2a_n}\int_{-S_n}^{S_n}\int_{-a_n}^{a_n} f_{n-1}(t+v)dvdt$$

Utilisons le théorème de Fubini :

$$I_n = \int_{-S}^{S} f_n(t)dt = \frac{1}{2a_n}\int_{-a_n}^{a_n}\left(\int_{-S_n}^{S_n} f_{n-1}(t+v)dt\right)dv$$

Soit alors v tel que $|v| \leqslant a_n$. Par changement de variable :

$$\int_{-S_n}^{S_n} f_{n-1}(t+v)dt = \int_{-S_n+v}^{S_n+v} f_{n-1}(t')dt'$$

Comme $-a_n \leqslant v \leqslant a_n$: $-S_n + v \leqslant -S_n + a_n = -S_{n-1}$ et $S_n + v \geqslant S_n - a_n = S_{n-1}$.

Comme f_{n-1} est nulle à l'extérieur de $[-S_{n-1}, S_{n-1}]$ on a :

$$\int_{-S_n}^{S_n} f_{n-1}(t+v)dt = \int_{-S_n+v}^{S_n+v} f_{n-1}(t')dt' = \int_{-S_{n-1}}^{S_{n-1}} f_{n-1}(t')dt' = \int_{-S}^{S} f_{n-1}(t')dt' = I_{n-1}$$

En reportant :

$$I_n = \frac{1}{2a_n}\int_{-a_n}^{a_n} I_{n-1}dv = I_{n-1}$$

Les intégrales sont toutes égales à $I_0 = \displaystyle\int_{-a_0}^{a_0} f_0(t)dt = 2a_0 \times \frac{1}{a_0} \times \frac{1}{2} = 1$. (aire d'un triangle)

III. D La limite

III.D.1) $k_n = f_n - f_{n-1}$

a) On remarque que : $\forall x \in \mathbb{R},\ k_n(x) = \dfrac{1}{2a_n} \displaystyle\int_{x-a_n}^{x+a_n} (f_{n-1}(t) - f_{n-1}(x))\, dt$

$$|k_n(x)| \leqslant \frac{1}{2a_n} \int_{x-a_n}^{x+a_n} |t-x| k dt \leqslant \frac{1}{2a_n} k \int_{-a_n}^{a_n} |t'| dt' = \frac{ka_n}{2}$$

b) $\sup_{\mathbb{R}} |k_n| \leqslant \dfrac{ka_n}{2}$. Par majoration la série $\sum \sup_{\mathbb{R}} |k_n|$ converge. La série $\sum k_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

III.D.2) $s(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} k_p(x) \right)$.

a) Pour tout n, tout x, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} k_p(x) = f_n(x) - f_0(x)$ (somme télescopique). D'où l'existence de la limite et, par passage à la limite :

$$s(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) - f_0(x)$$

b) Pour tout n, tout x, $|f_n(x)| \leqslant 1/a_0$. Par passage à la limite : $|w(x)| \leqslant 1/a_0$.

c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant k|x-y|$. On fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient : $|w(x) - w(y)| \leqslant |x-y|$.

d) Si $|x| \geqslant S \geqslant S_n$, $f_n(x) = 0$, donc $w(x) = 0$.

III.D.3) Pour tout n, $\displaystyle\int_{-S}^{S} f_n(t)dt = \int_{-S_n}^{S_n} f_n(t)dt = 1$.

a) Pour tout n, tout $x \in [-S, S]$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{a_0}$, fonction constante intégrable sur $[-S, S]$. Le théorème de convergence dominée s'applique sans problème.

$$\int_{-S}^{S} w(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_{-S}^{S} f_n(t)dt = 1$$

b) La fonction w n'est donc pas nulle sur $\mathbb{R}$.

III.D.4) a) Pour $n \geqslant 2$ et x réel on peut écrire :

$$k_n'(x) = f_n'(x) - f_{n-1}'(x) = \frac{f_{n-1}(x+a_n) - f_{n-1}(x-a_n)}{2a_n} - f_{n-1}'(x)$$

$$k_n'(x) = \frac{\displaystyle\int_{x-a_n}^{x+a_n} \left(f_{n-1}'(t) - f_{n-1}'(x)\right) dt}{2a_n}$$

Pour $n \geqslant 3$, f_{n-1}' est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la valeur absolue de sa dérivée est majorée par $\frac{1}{a_0 a_1}$ d'après $III.C3)$. Le théorème des accroissements finis permet de dire que f_{n-1}' est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{a_0 a_1}$ et on obtient

$$|k_n'(x)| \leqslant \frac{1}{2a_n} \int_{x-a_n}^{x+a_n} |t-x| \frac{1}{a_1 a_0} dt = \frac{a_n}{2a_1 a_0}$$

On a donc pour $n \geqslant 3$, $\sup_{\mathbb{R}} |k_n'| \leqslant \dfrac{a_n}{2a_0 a_1}$.

La série $\sum k_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} k_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ et telle que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} k_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. La somme est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b)c) $w - f_0 = s = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (f_n - f_{n-1}) + f_1 - f_0$ donc $w = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (f_n - f_{n-1}) + f_1$ est $\mathscr{C}^1$ comme somme de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

d) Pour tout x, $w'(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (f_n'(x) - f_{n-1}'(x)) + f_1'(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n'(x)$. Or pour tout x, $|f_n'(x)| \leqslant \frac{1}{a_0 a_1}$.

Résultat obtenu par passage à la limite. endenumerate

III.D.5) Démarche entièrement identique à la question précédente en utilisant l'expression de la dérivée d'ordre p et les majorations de $III.C.3$)..

Partie IV : classes quasi-analytiques

IV.A Quelques propriétés d'une classe

IV.A. 1) Soit $f \in C(M)$ et A, B les constantes associées. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $g; x \mapsto f(ax+b)$. g est de classe c^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ |g^{(n)}(x)| = |a^n f^{(n)}(ax+b)| \leqslant |a|^n AB^n M_n = A(|a|B)^n M_n$$

ce qui montre que $g \in C(M)$.

IV.A. 2) Si f_1, f_2 sont deux éléments de $C(M)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, $f_1 + \alpha f_2$ est de classe c^∞ sur $\mathbb{R}$ et, en notant A_1, B_1, A_2, B_2 les constantes associées on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ |(f_1 + \alpha f_2)^{(n)}(x)| = |f_1^{(n)}(x) + \alpha f_2^{(n)}(x)| \leqslant A_1 B_1^n M_n + |\alpha| A_2 B_2^n M_n$$

Soit $B = \max(B_1, B_2)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ |(f_1 + \alpha f_2)^{(n)}(x)| = \leqslant (A_1 + |\alpha| A_2) B^n M_n$$

$f_1 + \alpha f_2 \in C(M)$. $C(M)$ est un sev de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

IV.A.3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n^2 \leqslant M_{n-1} M_{n+1}$ et comme les termes sont tous strictement positifs, $\dfrac{M_n}{M_{n+1}} \leqslant \dfrac{M_{n-1}}{M_n}$. La suite de terme général $w_n = \dfrac{M_{n-1}}{M_n}$ est donc décroissante.

a) Soit p fixé et pour $n \geqslant p$, $v_n = \dfrac{M_n}{M_{n-p}}$.

$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{M_{n+1}}{M_{n+1-p}} \dfrac{M_{n-p}}{M_n} = \left(\dfrac{M_{n+1}}{M_n}\right) / \left(\dfrac{M_{n+1-p}}{M_{n-p}}\right) = w_{n+1}/w_{n+1-p} \geqslant 1$

d'après la décroissance de la suite (w_n). Comme $v_n > 0$ on obtient $v_{n+1} \geqslant v_n$.

Cette suite est croissante et tous les termes sont supérieurs au premier terme $v_p = \dfrac{M_p}{M_0} = M_p$. D'où $\dfrac{M_n}{M_{n-p}} \geqslant M_p$ ce qui est le résultat demandé.

b) Si f, g sont deux éléments de $C(M)$, fg est de classe c^∞ sur $\mathbb{R}$ et , en utilisant la formule de Leibniz et en notant A, B, A', B' les constantes associées à f et g on a pour tout n de $\mathbb{N}$, tout x de $\mathbb{R}$:

$$|(fg)^{(n)}(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |f^{(k)}(x)| \times |g^{(n-k)}(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} AB^k M_k A' B'^{n-k} M_{n-k}$$

Notons $B'' = \max(B, B') > 0$; les réels sont tous positifs et $M_k M_{n-k} \leqslant M_n$

$$|(fg)^{(n)}|(x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} AA' B''^n M_n = AA'(2B'')^n M_n$$

$fg \in \mathbb{C}(M)$.

IV.B un exemple de classe quasi-analytique. $U_n = n!$

IV.B.1) $U_n = n! >$, $U_0 = 0! = 1$, $U_{n-1} U_{n+1} = (n-1)!^2 n(n+1) \geqslant n!^2 = U_n^2$.

IV.B.2) $f \in C(U)$.

a) On applique la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n entre α et x et on obtient directement :

$$f(x) = 0 + \int_\alpha^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

b) La majoration du reste (cf. cours) donne :

$$|f(x)| \leqslant \frac{|x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[\alpha, x]} |f^{(n+1)}| \leqslant \frac{|x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)!} AB^{n+1} U_{n+1} = A\left(|x-\alpha| B\right)^{n+1}$$

Pour tout n et tout x tel que $|x - \alpha| \leqslant \frac{1}{2B}$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{A}{2^{n+1}}$.

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient par encadrement $f(x) = 0$.

c) Soit $f \in C(U)$ dont toutes les dérivées s'annulent en 0. D'après la question précédente f est nulle sur $[-1/2B, 1/2B]$. Toutes les dérivées de f s'annulent en $1/2B$ et $-1/2B$. On applique le résultat précédent en $\alpha = \pm 1/2B$. On montre ainsi de proche en proche que f est nulle sur tous les intervalles $[-k/2B, k/2B]$, $k \in \mathbb{N}$. $f = 0$. $C(U)$ est quasi-analytique.

IV.C Caractérisation

IV.C.1) Supposons $C(M)$ quasi-analytique. Soit $f \in C(M) \cap \mathcal{W}$. f est nulle en dehors d'un segment $[-a, a]$. Prenons $\alpha = a + 1$. Soit $g : x \mapsto f(x + \alpha)$. D'après $IV.A.1)$, $g \in \mathbb{C}(M)$. g est nulle sur un intervalle de centre 0, donc g et toutes ses dérivées s'annulent en 0. Comme la classe est quasi-analytique, $g = 0$ et par conséquent $f = 0$.

IV.C.2) Supposons que la classe $C(M)$ ne soit pas quasi-analytique. Il existe donc une fonction f de cette classe non-nulle et dont toutes les dérivées s'annulent en 0. Quitte à considérer $f_1 : x \mapsto f(-x)$ ($f_1 \in C(M)$), on peut supposer qu'il existe un réel strictement positif α tel que $f(\alpha) \neq 0$.
Considérons alors g définie par $g(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $g(x) = f(x)$ sinon. On vérifie facilement que $g \in C(M)$: le raccord en 0 est $\mathscr{C}^\infty$ et sur $\mathbb{R}^-$ toutes les dérivées sont nulles. Soit alors $h : x \mapsto g(x)g(2\alpha - x)$. h est un produit de deux fonctions de $C(M)$, donc $h \in C(M)$.
Si $x \leqslant 0$, $g(x) = 0$ donc $h(x) = 0$ et si $x \geqslant 2\alpha$, $g(2\alpha - x) = 0$ et $h(x) = 0$.
$h \in \mathcal{W}$. $h(\alpha) = g(\alpha)^2 = f(\alpha)^2 \neq 0$ donc $h \neq 0$.
Par contraposition $C(M) \cap \mathcal{W} = \{0\} \Rightarrow C(M)$ quasi-analytique.

IV.D Autour du théorème de Denjoy-Carleman.

IV.D.1) $\alpha_1 \times ... \times \alpha_n = \dfrac{M_{n-1}}{M_n} \times \dfrac{M_{n-2}}{M_{n-1}} \times ... \times \dfrac{M_0}{M_1} = \dfrac{M_0}{M_n} = \dfrac{1}{M_n}$ Comme la suite (α_n) est décroissante on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \alpha_n^n \leqslant \alpha_1 ... \alpha_n = \frac{1}{M_n} \quad \text{et donc } 0 \leqslant \frac{M_{n-1}}{M_n} \leqslant \left(\frac{1}{M_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Le critère de majoration des séries de réels positifs permet d'affirmer que $(IV.4)$ entraîne $(IV.5)$.

IV. D.2) Définissons la suite (a) par $a_0 = a_1$ et pour $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{M_{n-1}}{M_n}$.
Supposons $(IV.5)$ vérifié. La suite (a_n) est une suite décroissante de réels strictement positifs. De plus la série $\sum a_n$ converge donc $\lim a_n = 0$.
On peut définir comme en partie III, une fonction w de classe $Cinf$, élément de $\mathcal{W}$. Cette fonction vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ |w^{(n)}(x)| \leqslant \frac{1}{a_0 a_1 ... a_n} = \frac{M_n}{a_0}$$

Cette fonction est élément de $C(M) \cap \mathcal{W}$ et elle est non nulle. D'après $IV.C.2)$, la classe $C(M)$ n'est pas quasi-analytique..

* * * *
* * *
* *
*