PROBLÈME II (ESIM PC 2000)

Notations

Pour tout entier $k > 0$ on notera u_k la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $u_k(x) = (2k^2x^2 - 1)\mathrm{e}^{-k^2x^2}$.

Pour $x > 0$, la somme de la série $\sum_{k\geqslant 1} u_k(x)$ sera désignée par $S(x)$ et la somme partielle de rang n, $\sum_{k\geqslant 1}^{n} u_k(x)$ sera notée $S_n(x)$.

On admettra que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Partie I

Dans cette partie, on établit que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

1. a) Justifier la convergence uniforme de la série $\sum_{k\geqslant 1} u_k(x)$ sur tout intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. a) Prouver que pour tout entier non nul k, u_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_k(t)\,\mathrm{d}t$, et en déduire que la somme de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\int_0^{+\infty} u_k(t)\,\mathrm{d}t$ est nulle.

(Indication : On pourra intégrer par parties $\displaystyle\int_\varepsilon^A 2k^2t^2\mathrm{e}^{-k^2t^2}\,\mathrm{d}t$*.)*

c) Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\int_0^{+\infty} |u_k(t)|\,\mathrm{d}t$.

(Indication : On pourra remarquer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_k(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} u_k(t)\,\mathrm{d}t$*.)*

3. Soit $a \geqslant 1$ et f une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, croissante sur $[0,a]$ et décroissante sur $[a,+\infty[$.

On pose pour tout entier naturel k : $d_k(f) = f(k) - \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Démontrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} d_k(f)$ est convergente. On notera $D(f)$ sa somme.

b) Déterminer un entier naturel p, indépendant de f et de a, tel que : $|D(f)| \leqslant p\,f(a)$.
(Indication : On pourra encadrer $d_k(f)$ en distinguant les différents cas : $k \geqslant a$, $k < a-1$ et $a > k \geqslant a-1$.)

On admettra dans la suite du problème que cette majoration est encore valable pour $a \geqslant 0$.

4. On fixe $x > 0$. On considère les fonctions $f_1 : t \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2t^2}$ et $f_2 : t \longmapsto 2x^2t^2\mathrm{e}^{-x^2t^2}$.

a) Prouver que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$.

b) En utilisant la question I.3.b appliquée aux fonctions f_1 et f_2, démontrer les propositions suivantes :

i) S est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

ii) $\exists M_1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leqslant M_1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$.

5. a) Établir l'inégalité suivante : $\forall\, w \in \mathbb{R}_+\,,\ w \leqslant 4\mathrm{e}^{w/4}$.

b) En déduire que : $\forall\, x \geqslant 1\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*\,,\ 0 \leqslant u_k(x) \leqslant 4\mathrm{e}^{-k^2x^2/2} \leqslant 4\mathrm{e}^{-kx^2/2}$.

c) Puis démontrer que : $\forall\, x \geqslant 1\,,\ \left(\mathrm{e}^{x^2/2} - 1\right) S(x) \leqslant 4$.

6. Déduire de ce qui précède que la fonction S est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II

L'objet de cette partie est le calcul de l'intégrale de S sur $\mathbb{R}_+^*$

1. Prouver qu'on peut définir deux fonctions Φ et Λ sur $]-1,+\infty[$ en posant :

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} S(t)\, t^x \ \mathrm{d}t$$

$$\Lambda(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^x \ \mathrm{d}t$$

2. a) Montrer que les fonctions Φ et Λ sont continues sur $]-1,+\infty[$. **[Ce résultat pourra être admis.]**

b) Calculer $\Lambda\left(-\frac{1}{2}\right)$.

3. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$\int_0^{+\infty} u_k(x)\, t^x \ \mathrm{d}t = \frac{x}{2\,k^{x+1}}\ \Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

4. On pose alors, si cette série converge, $Z(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\,k^{x+1}}$

a) Donner l'ensemble de définition de Z.

b) Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} xZ(x)$.

(Indication : On pourra appliquer la question I.3 à la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{2(1+t)^{x+1}}$.)

5. On considère deux réels fixés $\varepsilon > 0$ et $x > 0$.

a) Montrer qu'il existe un réel $\lambda \in]0,1[$ tel que : $\left|\displaystyle\int_0^{\lambda} [S(t) - S_n(t)]\, t^x \ \mathrm{d}t\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

(Indication : On pourra utiliser la question I.4.)

Dans la suite de la question 5 on supposera λ choisi de cette façon.

b) Montrer qu'il existe un entier naturel N_1 tel que : $\forall\, n \geqslant N_1\,,\ \left|\displaystyle\int_{\lambda}^{1} [S(t) - S_n(t)]\, t^x \ \mathrm{d}t\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

(Indication : On pourra utiliser la question I.1.)

c) Montrer qu'il existe un entier naturel N_2 tel que : $\forall\, n \geqslant N_2\,,\ \left|\displaystyle\int_{1}^{+\infty} [S(t) - S_n(t)]\, t^x \ \mathrm{d}t\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

(Indication : On pourra utiliser la question I.5.b.)

d) En déduire qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geqslant N$:

$$\left|\Phi(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2\,k^{x+1}}\ \Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right)\right| < \varepsilon.$$

6. Démontrer que pour tout $x > 0$:

$$\Phi(x) = x\, Z(x)\, \Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

7. En utilisant les questions II.2 et II.4, calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\ \mathrm{d}t$.

8. Comparer le résultat de la question II.7 à celui obtenu dans la question I.2.b.
Que peut-on en conclure ?