PROBLÈME II (ESIM PC 2000)

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note u_k la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $u_k(x) = (2k^2x^2 - 1)\mathrm{e}^{-k^2x^2}$. On note respectivement $S_n(x)$ et $S(x)$ la somme partielle de rang n et la somme totale de la série $\sum_{k\geqslant 1} u_k(x)$.

Partie I

1. a) Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in [a,b]$, on a $\mid u_k(x) \mid \leqslant (2k^2b^2+1)\mathrm{e}^{-k^2a^2}$ d'où $\|u_k\|_\infty^{[a,b]} \leqslant (2k^2b^2+1)\mathrm{e}^{-k^2a^2}$ et $(2k^2b^2+1)\mathrm{e}^{-k^2a^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} 2k^2b^2\mathrm{e}^{-k^2a^2}$ qui est le terme général d'une série convergente (car quand $k \to +\infty$, c'est un $o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$).

Il en résulte que la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement, donc uniformément sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

b) Chaque fonction u_k est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, d'après **a)** , la série $\sum u_k$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Il en résulte que la somme S de la série est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. a) On a $u_k(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2k^2t^2\mathrm{e}^{-k^2t^2}$ et $2k^2t^2\mathrm{e}^{-k^2t^2} = o(\dfrac{1}{t^2})$ lorsque $t \to +\infty$. Ainsi la fonction u_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (théorèmes habituels, non répétés ici).

b) *Rem :* l'intégrale ne pose pas de problème en 0, donc on fera une intégration par parties sur $[0,A]$ directement, et non sur $[\varepsilon, A]$ comme le dit l'énoncé...

Une intégration par parties donne

$$\int_0^A 2k^2t^2e^{-k^2t^2}\ \mathrm{d}t = \left[-t\mathrm{e}^{-k^2t^2}\right]_0^A + \int_0^A \mathrm{e}^{-k^2t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Le passage à la limite quand $A \to +\infty$, donne

$$\int_0^{+\infty} 2k^2t^2\mathrm{e}^{-k^2t^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-k^2t^2}\ \mathrm{d}t \quad \text{d'où} \quad \int_0^{+\infty} u_k(t)\ \mathrm{d}t = 0,$$

ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_k(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

c) La fonction u_k est positive sur $\left[\dfrac{1}{k}, +\infty\right[$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mid u_k(t) \mid\ \mathrm{d}t \geqslant \int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} u_k(t)\ \mathrm{d}t$.

Un calcul identique à celui de **b)** donne

$$\int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} u_k(t)\ \mathrm{d}t = \left[-t\mathrm{e}^{-k^2t^2}\right]_{\frac{1}{k}}^{+\infty} = \frac{1}{ke}.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\int_0^{+\infty} \mid u_k(t) \mid\ \mathrm{d}t$ est divergente.

3. Soit $a \geqslant 1$ et $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction croissante sur $[0,a]$ et décroissante sur $[a, +\infty[$.
On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_k(f) = f(k) - \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t$.

a) Pour $k \geqslant a$, la décroissance de f donne l'encadrement $0 \leqslant d_k(f) \leqslant f(k) - f(k+1)$.
La fonction f admet une limite en $+\infty$, ce qui assure la convergence de la série télescopique $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} f(k) - f(k+1)$ et donc celle de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} d_k(f)$.

b) Avec l'encadrement trouvé en **a)** , on obtient

$$0 \leqslant \sum_{k \geqslant a} d_k(f) \leqslant f(a) - \lim_{k \to +\infty} f(k) \leqslant f(a).$$

Pour $k < a-1$, la croissance de f donne l'encadrement $f(k) - f(k+1) \leqslant d_k(f) \leqslant 0$, ainsi

$$-f(a) \leqslant f(0) - f(a) \leqslant \sum_{k<a-1} d_k(f) \leqslant 0.$$

Enfin pour le k tel que $a-1 \leqslant k < a$, on a

$$\min(f(k), f(k+1)) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant f(a)$$

ainsi

$$f(k) - f(a) \leqslant d_k(f) \leqslant f(k) - \min(f(k), f(k+1)) \leqslant f(k).$$

En regroupant, on obtient $-2f(a) + f(k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} d_k(f) \leqslant f(a) + f(k)$, ainsi

$$|D(f)| \leqslant 2f(a).$$

4. Pour $x > 0$, on considère les fonctions $f_1 : t \to \mathrm{e}^{-x^2t^2}$ et $f_2 : t \to 2x^2t^2\mathrm{e}^{-x^2t^2}$.
Elles sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme on a $f_1(t) = o(\frac{1}{t^2})$ et $f_2(t) = o(\frac{1}{t^2})$ en $+\infty$, elles sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) D'après 2.b), on a

$$\int_0^{+\infty} f_2(t) - f_1(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (2x^2t^2 - 1)\mathrm{e}^{-x^2t^2}\ \mathrm{d}t = 0.$$

Le changement de variable $u = xt$ donne

$$\int_0^{+\infty} f_1(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u.$$

Il en résulte que

$$\int_0^{+\infty} f_1(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_2(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}.$$

b) i) Les relations de Chasles permettent d'écrire

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_k^{k+1} f_1(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_1(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_2(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_k^{k+1} f_2(t)\ \mathrm{d}t$$

En introduisant $\sum_{k=0}^{+\infty}\int_k^{k+1} f_2(t)\ \mathrm{d}t - \int_k^{k+1} f_1(t)\,dt = 0$, dans les décompositions des $u_k(x)$

$$u_k(x) = f_2(k) - f_1(k) = d_k(f_2) - d_k(f_1) + \int_k^{k+1} f_2(t)\ \mathrm{d}t - \int_k^{k+1} f_1(t)\ \mathrm{d}t,$$

on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_2(k) - f_1(k) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} f_2(k) - f_1(k) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} d_k(f_2) - d_k(f_1)$$

Par ailleurs, la fonction f_1 est décroissante sur $[0, +\infty[$ avec $f_1(0) = 1$ et la fonction f_2 est croissante sur $[0, \frac{1}{x}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{x}, +\infty[$ avec $f_2(\frac{1}{x}) = \frac{2}{\mathrm{e}}$.
En utilisant I 3.b), appliqué à f_1 et f_2, on obtient

$$|D(f_1)| \leqslant 2 \quad \text{et} \quad |D(f_2)| \leqslant \frac{4}{\mathrm{e}}.$$

Il en résulte que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |S(x)| \leqslant 1 + |D(f_2)| + |D(f_1)| \leqslant 3 + \frac{4}{\mathrm{e}}.$$

Ainsi S est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) ii) En utilisant à nouveau les décompositions des $u_k(x)$, on obtient la majoration

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leqslant 1 + \left|\sum_{k=0}^{n} d_k(f_2)\right| + \left|\sum_{k=0}^{n} d_k(f_1)\right| + \left|\int_0^{n+1} f_2(t) - f_1(t)\,dt\right|$$

La fonction $F : u \to \displaystyle\int_0^u f_2(t) - f_1(t)\ \mathrm{d}t = \left[-t\mathrm{e}^{-x^2t^2}\right]_0^u = -u\mathrm{e}^{-x^2u^2}$ a pour tableau de variation

u	0		$\frac{1}{\sqrt{2}x}$		$+\infty$
$F'(u)$		-	0	$+$	
F	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}x}$	$\nearrow$	0

On en déduit la majoration

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leqslant 1 + |D(f_2)| + |D(f_1)| + \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}x}.$$

En notant $M_1 = 1 + |D(f_2)| + |D(f_1)|$ et en utilisant le fait que $\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}} \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leqslant M_1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2x}.$$

5. a) L'étude des variations de la fonction $w \to 4\mathrm{e}^{\frac{w}{4}} - w$ sur $\mathbb{R}_+$ donne immédiatement l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad w \leqslant 4\mathrm{e}^{\frac{w}{4}}.$$

b) Soient $x \geqslant 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant a) avec $w = 2k^2x^2$ et le fait que $k^2 \geqslant k$, on obtient

$$0 \leqslant u_k(x) \leqslant 2k^2x^2\mathrm{e}^{-k^2x^2} \leqslant 4\mathrm{e}^{\frac{-k^2x^2}{2}} \leqslant 4\mathrm{e}^{\frac{-kx^2}{2}}.$$

c) Le calcul de la somme d'une série géométrique donne alors

$$0 \leqslant S(x) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} 4\left(\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\right)^k = 4\frac{\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}}.$$

Finalement

$$\forall x \geqslant 1, \quad (\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} - 1)S(x) \leqslant 4.$$

6. D'après 1.b) et 4 .b)ii), la fonction S est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc intégrable sur $]0, 1]$.

D'après 5.c), la fonction S est positive et majorée par $\dfrac{4}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} - 1}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Il en résulte que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II

1. La fonction $(x, t) \to S(t)t^x = S(t)\mathrm{e}^{x \ln t}$ est continue sur $]-1, +\infty[\times\mathbb{R}_+^*$.

La majoration de S sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrabilité de $t \to t^x$ sur $]0, 1]$ assure l'intégrabilité de $t \to S(t)t^x$ sur $]0, 1]$.

En utilisant la majoration du 5.c) et le fait $t^x\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}} = o(\frac{1}{t^2})$ en $+\infty$, pour tout x, on en déduit l'intégrabilité de $t \to S(t)t^x$ sur $[1, +\infty[$.

Il en résulte que la fonction $t \to S(t)t^x$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on peut ainsi définir une fonction Φ sur $]-1,+\infty[$, par

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} S(t)t^x \, \mathrm{d}t.$$

Un raisonnement totalement identique assure l'existence sur $]-1,+\infty[$, de la fonction

$$x \to \Lambda(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^x \, \mathrm{d}t.$$

2. a) Soit $[a,b] \subset]-1,+\infty[$. La fonction ϕ définie par $\phi(t) = \begin{cases} S(t)t^a & \text{si} \quad t \in]0,1] \\ S(t)t^b & \text{si} \quad t \in [1,+\infty[\end{cases}$ est continue par morceaux, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie la "domination uniforme"

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad |S(t)t^x| \leqslant \phi(t).$$

Il en résulte que Φ est continue sur $]-1,+\infty[$.
Avec un raisonnement identique, on établit que Λ est continue sur $]-1,+\infty[$.

b) le changement de variable $u = \sqrt{t}$ donne

$$\Lambda(-\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-u^2} \, du.$$

Ainsi $\Lambda(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

3. Soit $x > 0$. A l'aide du changement de variable $u = k^2t^2$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} u_k(t)t^x \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2k^{x+1}} \int_0^{+\infty} (2u-1)\mathrm{e}^{-u}u^{\frac{x-1}{2}} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2k^{x+1}} \left(2\Lambda(\frac{x+1}{2}) - \Lambda(\frac{x-1}{2}) \right).$$

A l'aide d'une double intégration par parties, on établit que

$$\forall u \in]-1,+\infty[, \quad \Lambda(u+1) = (u+1)\Lambda(u).$$

Il en résulte que

$$\int_0^{+\infty} u_k(t)t^x \, \mathrm{d}t = \frac{x}{2k^{x+1}} \Lambda(\frac{x-1}{2}).$$

4. On pose, lorsque la série converge, $Z(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k^{x+1}}$.

a) La série de terme général $\frac{1}{2k^{x+1}}$ converge si et seulement si $x+1 > 1$. Ainsi Z est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) La fonction $h : t \to \frac{1}{2(1+t)^{x+1}}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $h(0) = \frac{1}{2}$. Il en résulte, d'après I.3), la convergence de la série $\sum_{k \geqslant 0} d_k(h)$ et la majoration

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \left| \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) - \int_k^{k+1} h(t) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{2}{2}.$$

A l'aide de relations de Chasles, on obtient

$$\left| Z(x) - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+t)^{x+1}} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant 1.$$

Le calcul donne $|Z(x) - \frac{1}{2x}| \leqslant 1$, ainsi $Z(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{2x}$ ou encore

$$\lim_{x \to 0^+} xZ(x) = \frac{1}{2}.$$

5. On considère deux réels fixés $\varepsilon > 0$ et $x < 0$.

a) En utilisant les majorations de I.4), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad |(S(t) - S_n(t))t^x| \leqslant (\|S\|_\infty + M_1)t^x + \frac{\sqrt{\pi}}{2}t^{x-1}$$

Cette dernière expression correspondant à une fonction intégrable sur $]0,1]$, il existe donc $\lambda > 0$, qu'on peut choisir dans $]0,1[$, tel que

$$\int_0^\lambda (\|S\|_\infty + M_1)t^x + \frac{\sqrt{\pi}}{2}t^{x-1}\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\int_0^\lambda (S(t) - S_n(t))t^x\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$

b) D'après I 1.a), la suite S_n converge uniformément vers S sur $[\lambda, 1]$. La fonction $t \to t^x$ est bornée sur $[\lambda, 1]$. Il en résulte que la suite de fonctions $t \to (S(t) - S_n(t))t^x$ converge uniformément vers 0 sur $[\lambda, 1]$, ainsi

$$\exists N_1,\ \forall n \geqslant N_1, \quad \left|\int_\lambda^1 (S(t) - S_n(t))t^x\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

c) En utilisant les majorations de I.5.b) et la calcul de séries géométriques, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \geqslant 1, \quad |(S(t) - S_n(t))t^x| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} 4e^{-\frac{kt^2}{2}}t^x = 4\frac{\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} - 1}t^x.$$

La fonction continue $h : t \to \dfrac{4t^x}{\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} - 1}$ a une limite nulle en $+\infty$, elle est donc majorée sur $[1, \infty[$. On en déduit alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\int_1^{+\infty} (S(t) - S_n(t))t^x\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_1^{+\infty} \|h\|_\infty \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2}}\ \mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \|h\|_\infty \mathrm{e}^{-\frac{nt}{2}}\ \mathrm{d}t = \frac{2\|h\|_\infty \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}}{n}.$$

Ainsi

$$\exists N_2,\ \forall n \geqslant N_2, \quad \left|\int_1^{+\infty} (S(t) - S_n(t))t^x\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

d) En regroupant les résultats précédents, et en choisissant $N = \max(N_1, N_2)$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geqslant N, \quad \left|\int_0^{+\infty} (S(t) - S_n(t))t^x\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon,$$

soit, avec les notations et les résultats de 1) et 3),

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geqslant N, \quad \left|\Phi(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2k^{x+1}}\Lambda(\frac{x-1}{2})\right| \leqslant \varepsilon.$$

6. Le passage à la limite, $n \to +\infty$, dans 5.d) donne

$$\Phi(x) = xZ(x)\Lambda(\frac{x-1}{2}).$$

7. La continuité des fonctions Φ et Λ sur $]-1, +\infty[$, établie en 2), l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x \to 0^+} xZ(x)$ établies en 4) donnent

$$\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \lim_{x \to 0^+} \Phi(x) = \lim_{x \to 0^+} xZ(x)\Lambda(\frac{x-1}{2}) = \frac{1}{2}\Lambda(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

8. Si l'on avait pu intéger terme à terme, la série de somme S sur $]0, +\infty[$, le résultat obtenu en I 2.b) aurait donné $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

On constate, en effet, que le résultat obtenu en I 2.c) ne permet pas d'utiliser le théorème de convergence d'une série de fonctions en norme 1.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆