DM N°10 (pour le 31/03/2017)

L'objet du problème est l'étude de certaines propriétés des fonctions J_n, définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta - n\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

(J_n s'appelle la fonction de Bessel d'indice n ; ces fonctions interviennent dans de nombreux problèmes de Physique).

Première partie :

1. Prouver que la fonction J_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer à l'aide d'une intégrale ses dérivées successives $J_n^{(k)}$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

3. a) Calculer $J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x)$ en fonction de $J_n'(x)$.

b) Calculer $x\big[J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)\big]$ en fonction de n et de $J_n(x)$.

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $J_n'(x) = \dfrac{n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x)$.

Deuxième partie : Développement de J_0 en série entière

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale : $I_p = \displaystyle\int_0^\pi \sin^{2p}\theta\,\mathrm{d}\theta$.

Trouver une relation de récurrence entre I_p et I_{p+1} et en déduire la valeur de I_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2. Établir la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}\sin^{2p}\theta}{(2p)!}$$

série de fonctions de la variable réelle θ, lorsque x est un nombre réel fixé.

3. Démontrer alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

4. En déduire le développement en série entière de x des fonctions :

$$x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Troisième partie : Développement de J_n en série entière

1. Pour tout entier p strictement positif, on pose :

$$R_p(x) = J_n(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} J_n^{(k)}(0)$$

Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $R_p(x)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$. En déduire que J_n est développable en série entière ; quel est son rayon de convergence ?

2. k étant un entier strictement positif fixé, démontrer par récurrence que, pour tout entier n relatif :

$$J_n^{(k)} = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} J_{n-k+2i}$$

(on pourra utiliser le résultat de la question I.3)

3. En déduire la valeur de $J_n^{(k)}(0)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $k > 0$.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$, démontrer que :

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(x) z^n$$

(on utilisera les développements en séries de $\mathrm{e}^{\frac{xz}{2}}$ et de $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2z}}$ et leur produit de Cauchy).

Quatrième partie : Application à une équation différentielle

1. a) n étant un entier relatif fixé, vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$xJ_n'(x) = -x^2(J_n''(x) + J_n(x)) + \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos\theta \cos(x \sin\theta - n\theta)\, \mathrm{d}\theta$$

b) En déduire que J_n est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E_n) \quad : \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

2. a) n étant un entier naturel donné, à quelles conditions doit satisfaire une suite réelle $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ pour que la fonction y, somme de la série entière $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p$ soit solution de (E_n) sur son intervalle ouvert de convergence (supposé non vide) ?

b) Pour toute suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vérifiant ces conditions, calculer, pour tout entier naturel k, a_{n+2k} en fonction de a_n. Quelles sont les valeurs des autres termes de la suite ?

c) Déduire de ce qui précède que l'espace vectoriel des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$ développables en série entière est de dimension 1, et en donner une base.

Cinquième partie : Étude des zéros de J_0

(E_0) désigne ici l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$.
Si y est solution de (E_0), on définit, pour $x > 0$, la fonction u par : $u(x) = \sqrt{x}y(x)$.

1. Écrire l'équation différentielle (E) vérifiée par u.

2. Soit v une solution de l'équation différentielle $v'' + v = 0$, et u une solution de (E).
Montrer que, pour tout $x > 0$: $\dfrac{uv(x)}{4x^2} = (uv'' - u''v)(x)$.

En déduire que, si a et b sont deux nombres réels strictement positifs, on a :

$$\int_a^b \frac{u(x)v(x)}{4x^2}\,\mathrm{d}x = (uv' - u'v)(b) - (uv' - u'v)(a)$$

3. Soit a un réel strictement positif, en appliquant la relation précédente à $v(x) = \sin(x - a)$ et $b = a + \pi$, montrer qu'il existe x_a appartenant à $[a, a + \pi[$ tel que $J_0(x_a) = 0$ (on pourra faire un raisonnement par l'absurde).
En déduire que J_0 admet une infinité de zéros positifs.

Sixième partie : Une propriété d'orthogonalité des fonctions J_n

1. Soit $\mathcal{C}([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de la variable réelle x définies et continues sur l'intervalle $[0,1]$.

Pour tout couple (f, g) d'éléments de cet espace, on pose :

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 x f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0,1])$.
On supposera dans la question suivante que $\mathcal{C}([0,1])$ est muni de la structure d'espace vectoriel préhilbertien réel définie par ce produit scalaire.

2. **a)** Vérifier que, pour tout entier naturel n, et pour tout réel α non nul, la fonction $x \mapsto J_n(\alpha x)$ est solution de l'équation différentielle : $x^2 y'' + x y' + (\alpha^2 x^2 - n^2) y = 0$.

b) En déduire, pour tout couple (α, β) de réels distincts non nuls, une primitive de la fonction $x \mapsto (\alpha^2 - \beta^2) x J_n(\alpha x) J_n(\beta x)$.

c) On admettra que l'ensemble des zéros de la fonction J_n sur $\mathbb{R}_+^*$ est une suite croissante $(s_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui tend vers $+\infty$

Démontrer que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ des restrictions à l'intervalle $[0,1]$ des fonctions $x \mapsto J_n(s_k x)$ est orthogonale dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}([0,1])$ défini ci-dessus.