DM N°5 (pour le 27/11/2015)

Le problème porte sur l'étude des *séries factorielles*, séries de fonctions de la forme

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}\,.$$

Partie I. Séries factorielles

I.A.

I.A.1. Pour tout entier naturel n et tout réel x strictement positif on pose :

$$u_n(x)=\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}\quad,\quad v_n(x)=\frac{1}{(n+1)^x}\quad,\quad w_n(x)=\frac{u_n(x)}{v_n(x)}\,.$$

Montrer que la série de terme général

$$\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)$$

définie pour $n\geqslant 1$, est convergente.

I.A.2. En déduire qu'il existe un nombre réel strictement positif $\ell(x)$ (dépendant de x) tel que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n(x)}{v_n(x)}=\ell(x)\,.$$

I.B. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes et x un réel strictement positif.

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n u_n(x)$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n v_n(x)$ est absolument convergente.

I.C. On désigne désormais par $\mathscr{A}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n u_n(x)$ soit absolument convergente pour tout réel x strictement positif.

Soit $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ élément de $\mathscr{A}$. Montrer que :

I.C.1. pour tout réel α strictement positif, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n u_n(x)$ est normalement convergente sur $[\alpha\,;+\infty[$.

I.C.2. la fonction f_a définie par

$$f_a(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x)$$

est continue sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

I.C.3. la fonction f_a tend vers 0 en $+\infty$.

I.D.

I.D.1. Donner un exemple d'un élément a de $\mathscr{A}$ avec a_n non nul pour tout entier n.

I.D.2. Donner un exemple d'une suite $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne soit pas un élément de $\mathscr{A}$.

I.E. Soit a un élément de $\mathscr{A}$.

I.E.1. Montrer que, pour tout entier n, la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et que

$$\forall x > 0\,,\ \left|u_n'(x)\right| \leqslant u_n(x)\left(\frac{1}{x} + \ln\left(1+\frac{n}{x}\right)\right).$$

Indication : on pourra calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln u_n(x)$, puis utiliser la comparaison à une intégrale.

I.E.2. En déduire que la fonction f_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie II. Représentation intégrale

II.A.

II.A.1. Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$\forall k \in [\![0\,;n]\!]\,,\ P_k = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(X+i)\cdot$$

Montrer que les polynômes P_k forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

II.A.2. En déduire qu'il existe des réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ indépendants de x tels que

$$\forall x > 0\,,\ \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{x+k}\,.$$

II.A.3. Exprimer α_k en fonction de k et n.

II.B. Pour tout $x \geqslant 1$ et tout entier naturel k, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-y)^{x-1+k}\,dy$.

II.C. Déduire des deux questions précédentes que

$$\forall x \geqslant 1\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ \int_0^1 (1-y)^{x-1}y^n\,dy = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\,.$$

En conclure que, pour tout élément a de $\mathscr{A}$ l'on a :

$$\forall x \geqslant 1\,,\ f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 (1-y)^{x-1}y^n\,dy\,.$$

II.D. Soit a un élément de $\mathscr{A}$.

II.D.1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n y^n$ est supérieur ou égal à 1.

On note φ_a la fonction définie sur $[0\,;1[$ par :

$$\varphi_a(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n\,.$$

II.D.2. Vérifier que la fonction $y \mapsto (1-y)^{x-1}\varphi_a(y)$ où $x \geqslant 1$ est continue sur $[0\,;1]$.

II.D.3. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$

$$f_a(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1}\varphi_a(y)\,dy\,.$$