DM N°7 (pour le 08/01/2016)

Autour des sommes d'Euler

Dans tout le problème, on note pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

On note ζ la fonction définie pour $x > 1$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Le but du problème est d'étudier des séries faisant intervenir la suite (H_n) et notamment d'obtenir une relation due à Euler qui exprime, pour r entier naturel supérieur ou égal à 2, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$ à l'aide de la valeur de la fonction ζ en certains points entiers.

I. Représentation intégrale de sommes de séries

I.A.

I.A.1) Justifier que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ converge.

I.A.2) Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que $\mathrm{H}_n \underset{+\infty}{=} \ln n + \mathrm{A} + \mathrm{o}(1)$. En déduire que $\mathrm{H}_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

I.B. Soit r un entier naturel.
Pour quelles valeurs de r la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite on notera $\mathrm{S}_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$ lorsque la série converge.

I.C.

I.C.1) Donner sans démonstration les développements en série entière des fonctions $t \mapsto \ln(1-t)$ et $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ ainsi que leur rayon de convergence.

I.C.2) En déduire que la fonction

$$t \longmapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$$

est développable en série entière sur $]-1\,;1[$ et préciser son développement en série entière à l'aide des réels H_n.

I.D. Pour tout couple d'entiers naturels (p,q) et pour tout $\varepsilon \in]0\,;1[$, on note :

$$\mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{I}^{\varepsilon}_{p,q} = \int_{\varepsilon}^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t.$$

I.D.1) Montrer que l'intégrale $\mathrm{I}_{p,q}$ existe pour tout couple d'entiers naturels (p,q).

I.D.2) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ \forall \varepsilon \in]0\,;1[,\quad \mathrm{I}^{\varepsilon}_{p,q} = -\frac{q}{p+1}\mathrm{I}^{\varepsilon}_{p,q-1} - \frac{\varepsilon^{p+1}(\ln \varepsilon)^q}{p+1}.$$

I.D.3) En déduire que l'on a :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\quad \mathrm{I}_{p,q} = -\frac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p,q-1}.$$

I.D.4) En déduire une expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ en fonction des entiers p et q.

I.E.

Soit r un entier naturel non nul et f une fonction développable en série entière sur $]-1\,;1[$.

On suppose que pour tout $x \in]-1\,;1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{(n+1)^r}$ converge absolument.

Montrer que :

$$\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{r-1}(r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}.$$

I.F.

I.F.1) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $r \geqslant 2$:

$$\mathrm{S}_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

I.F.2) Établir que l'on a alors $\mathrm{S}_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\,\mathrm{d}t$.

I.F.3) En déduire que $\mathrm{S}_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\,\mathrm{d}t$, puis trouver la valeur de S_2 en fonction de $\zeta(3)$.

II. La fonction β

II.A. *La fonction* Γ

II.A.1) Soit $x > 0$. Montrer que $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Dans toute la suite, on notera Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On admettra que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition, à valeurs strictement positives et qu'elle vérifie, pour tout réel $x > 0$, la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

II.A.2) Soient x et α deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x.

II.B. *La fonction* β *et son équation fonctionnelle*

Pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on définit $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$.

II.B.1) Justifier l'existence de $\beta(x,y)$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

II.B.2) Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.

II.B.3) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Établir que $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$.

II.B.4) En déduire que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x+1,y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x,y)$.

II.C. *Relation entre la fonction* β *et la fonction* Γ

On veut montrer que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, relation qui sera notée $(\mathcal{R})$.

II.C.1) Expliquer pourquoi il suffit de montrer la relation $(\mathcal{R})$ pour $x > 1$ et $y > 1$.

Dans toute la suite de cette question, on supposera que $x > 1$ et $y > 1$.

II.C.2) Montrer que $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u$.

On pourra utiliser le changement de variable $t = \dfrac{u}{1+u}$.

II.C.3) On note $\mathrm{F}_{x,y}$ la primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0. Montrer que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{F}_{x,y}(t) \leqslant \Gamma(x+y).$$

II.C.4) Soit $\mathrm{G}(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \mathrm{F}_{x,y}\big((1+u)a\big)\mathrm{d}u$.

Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

II.C.5) Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \mathrm{G}(a) = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$.

II.C.6) Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[c\,;d]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, puis que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.C.7) Exprimer pour $a > 0$, $\mathrm{G}'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, e^{-a} et a^{y-1}.

II.C.8) Déduire de ce qui précède la relation $(\mathcal{R})$.

III. La fonction digamma

On définit la fonction ψ (appelée fonction digamma) sur $\mathbb{R}_+^*$ comme étant la dérivée de $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$.
Pour tout réel $x > 0$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

III.A. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\psi(x+1) - \psi(x) = \dfrac{1}{x}$.

III.B. ***Sens de variation de*** ψ

III.B.1) À partir de la relation $(\mathcal{R})$, justifier que $\dfrac{\partial\beta}{\partial y}$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Établir que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\dfrac{\partial\beta}{\partial y}(x,y) = \beta(x,y)\big(\psi(y) - \psi(x+y)\big)$.

III.B.2) Soit $x > 0$ fixé. Quel est le sens de variations sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $y \mapsto \beta(x,y)$?

III.B.3) Montrer que la fonction ψ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

III.C. ***Une expression de*** ψ ***comme somme d'une série de fonctions***

III.C.1) Montrer que pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right).$$

III.C.2) Soit n un entier $\geqslant 2$ et x un réel > -1. On pose $p = \mathrm{E}(x)+1$, où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x.

Prouver que :

$$0 \leqslant \psi(n+x+1) - \psi(n) \leqslant \mathrm{H}_{n+p} - \mathrm{H}_{n-1} \leqslant \frac{p+1}{n}.$$

III.C.3) En déduire que, pour tout réel $x > -1$,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

III.D. ***Un développement en série entière***

On note g la fonction définie sur $[-1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

III.D.1) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1\,;+\infty[$.

Préciser notamment la valeur de $g^{(k)}(0)$ en fonction de $\zeta(k+1)$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

III.D.2) Montrer que pour tout entier n et pour tout $x \in\,]-1\,;1[$

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k \right| \leqslant \zeta(2)\,|x|^{n+1}.$$

Montrer que g est développable en série entière sur $]-1\,;1[$.

III.D.3) Prouver que pour tout x dans $]-1\,;1[$,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\zeta(n+1)x^n.$$

IV. Une expression de S_r en fonction de valeurs entières de ζ

Dans cette partie, on note B la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $B(x) = \dfrac{\partial^2\beta}{\partial y^2}(x,1)$.

IV.A. ***Une relation entre*** B ***et*** ψ

Justifier que B est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

À l'aide de la relation trouvée au **III.B.**, établir que pour tout réel $x > 0$:

$$xB(x) = \Big(\psi(1+x) - \psi(1)\Big)^2 + \Big(\psi'(1) - \psi'(1+x)\Big).$$

En déduire que B est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

IV.B. ***Expression de*** S_r ***à l'aide de la fonction*** B

IV.B.1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $B(x) = \displaystyle\int_0^1 \Big(\ln(1-t)\Big)^2 t^{x-1}\,dt$.

IV.B.2) Donner sans justification une expression, à l'aide d'une intégrale, de $B^{(p)}(x)$, pour tout entier naturel p et tout réel $x > 0$.

IV.B.3) En déduire que pour tout entier $r \geqslant 2$, $S_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!}\displaystyle\lim_{x\to 0^+} B^{(r-2)}(x)$.

IV.B.4) Retrouver alors la valeur de S_2 déjà calculée au **I.F.3.**

IV.C. Soit φ la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = \Big(\psi(1+x) - \psi(1)\Big)^2 + \Big(\psi'(1) - \psi'(1+x)\Big)$.

IV.C.1) Monter que φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition et donner pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ la valeur de $\varphi^{(n)}(0)$ en fonction des dérivées successives de ψ au point 1.

IV.C.2) Conclure que, pour tout entier $r \geqslant 3$,

$$2S_r = r\zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2}\zeta(k+1)\zeta(r-k).$$