

CORRIGÉ DU DM n°9

EXERCICE 1 (extrait de Banque PT 2015)

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs entières vérifiant pour tout couple d'entiers naturels (i, j) :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0 \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } 0 \leq i < j \end{cases}$$

où α et λ sont des constantes fixées vérifiant $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$.

1. Pour tout entier i , on a par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=0}^i \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} \\ &= \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j} = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} (\alpha + (1-\alpha))^i = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}. \end{aligned}$$

X suit donc une loi de Poisson de paramètre λ .

Remarque : puisque $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) = 1$, on a $\sum_{i,j} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1$, ce qui prouve a posteriori que la définition de l'énoncé a bien un sens !

2. De la même façon, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = j) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} = \frac{e^{-\lambda} \alpha^j \lambda^j}{j!} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^{i-j} (1-\alpha)^{i-j}}{(i-j)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} \alpha^j \lambda^j}{j!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-\alpha))^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda} \alpha^j \lambda^j}{j!} e^{\lambda(1-\alpha)} = \frac{e^{-\alpha\lambda} (\alpha\lambda)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Y suit donc une loi de Poisson de paramètre $\alpha\lambda$.

3. Pour $i = j = 0$ par exemple, il est facile de voir que $\mathbb{P}(X = i, Y = j) \neq \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$, donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
4. Z prend a priori ses valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, l'évènement $(Z = k)$ est la réunion disjointe des évènements $(Y = \ell, X = k + \ell)$ lorsque ℓ décrit $\mathbb{N}$. Donc :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k + \ell, Y = \ell).$$

Mais pour $k < 0$, $\mathbb{P}(X = k + \ell, Y = \ell) = 0$, donc $\mathbb{P}(Z = k) = 0$, et on peut considérer que Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On a alors, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+\ell} e^{-\lambda} \alpha^\ell (1-\alpha)^k}{\ell!k!} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda} (1-\alpha)^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^\ell \alpha^\ell}{\ell!} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda} (1-\alpha)^k}{k!} e^{\alpha\lambda},$$

donc Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-\alpha)$.

- 5.

$$\mathbb{P}(Y = j | Z = n) = \frac{\mathbb{P}(Y = j, Z = n)}{\mathbb{P}(Z = n)} = \frac{\mathbb{P}(Y = j, X = n + j)}{\mathbb{P}(Z = n)} = \frac{\frac{\lambda^{n+j} e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^n}{j!n!}}{\frac{\lambda^n e^{-\lambda} (1-\alpha)^n}{n!} e^{\alpha\lambda}} = \frac{\lambda^j \alpha^j}{j!} e^{-\alpha\lambda}.$$

6. On remarque que $\mathbb{P}(Y = j | Z = n) = \mathbb{P}(Y = j)$, donc les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.

7. Notons X le nombre total d'enfants et Y le nombre de garçons (Z est donc le nombre de filles). Les naissances étant indépendantes, lorsque $X = i$, Y suit la loi binomiale de paramètre (i, α) .

Ainsi, pour $0 \leq j \leq i$: $\mathbb{P}(Y = j | X = i) = \binom{i}{j} \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j}$, et évidemment $\mathbb{P}(Y = j | X = i) = 0$ si $j > i$ (il ne peut pas y avoir plus de garçons que d'enfants!).

Donc pour $0 \leq j \leq i$:

$$P(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(Y = j | X = i) \mathbb{P}(X = i) = \binom{i}{j} \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!}.$$

Remarque : ainsi, d'après la question 6., le nombre Y de garçons et le nombre Z de filles sont deux variables aléatoires indépendantes. Surprenant (ou pas)?

Remarque : les valeurs numériques n'ont guère d'importance ici.

EXERCICE 2 (extrait de CENTRALE TSI 2015, et recopié dans CCINP PC 2022)

A. Étude des longueurs des séries

A.1) a) $L_1(\Omega_n) = \{1, \dots, n\}$.

- b) Dans le cas où $m < n$: $(L_1 = m) = (P_1 \cap \dots \cap P_m \cap F_{m+1}) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_m \cap P_{m+1})$.
 $(L_1 = m)$ est la réunion de deux événements incompatibles. Donc la probabilité de $(L_1 = m)$ est la somme des probabilités de ces deux événements. Les lancers étant indépendants :

$$P(P_1 \cap \dots \cap P_m \cap F_{m+1}) = p^m q \text{ et } P(F_1 \cap \dots \cap F_m \cap P_{m+1}) = q^m p.$$

Donc $P(L_1 = m) = p^m q + q^m p$.

- c) Dans le cas $m = n$, $(L_1 = n) = (P_1 \cap \dots \cap P_n) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_n)$.
 $P(L_1 = n) = p^n + q^n$.

d)

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n P(L_1 = m) &= \sum_{m=1}^{n-1} p^m q + \sum_{m=1}^{n-1} q^m p + p^n + q^n = pq \frac{1 - p^{n-1}}{1 - p} + pq \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} + p^n + q^n \\ &= \sum_{m=1}^n P(L_1 = m) = p(1 - p^{n-1}) + q(1 - q^{n-1} + pp^{n-1} + qq^{n-1}) = p + q = 1. \end{aligned}$$

A.2) a) $L_2(\Omega_n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

- b) Dans le cas où $m + k < n$:

$$(L_1 = m) \cap (L_2 = k) = (P_1 \cap \dots \cap P_m \cap F_{m+1} \cap \dots \cap F_{m+k} \cap P_{m+k+1}) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_m \cap P_{m+1} \cap \dots \cap P_{m+k} \cap F_{m+k+1})$$

donc

$$P((L_1 = m) \cap (L_2 = k)) = p^m q^k p + q^m p^k q = p^{m+1} q^k + q^{m+1} p^k.$$

- c) Dans le cas où $m + k = n$:

$$(L_1 = m) \cap (L_2 = k) = (P_1 \cap \dots \cap P_m \cap F_{m+1} \cap \dots \cap F_{m+k}) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_m \cap P_{m+1} \cap \dots \cap P_{m+k})$$

donc

$$P((L_1 = m) \cap (L_2 = k)) = p^m q^k + q^m p^k.$$

- d) Les événements $(L_1 = m)$ pour m variant entre 1 et n forment un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$$P(L_2 = k) = \sum_{m=1}^n P((L_1 = m) \cap (L_2 = k)).$$

- Si $m + k > n$ alors $P((L_1 = m) \cap (L_2 = k)) = 0$.

- Si $m + k = n$, c'est-à-dire si $m = n - k$, alors $P((L_1 = m) \cap (L_2 = k)) = p^m q^k + q^m p^k = p^{n-k} q^k + q^{n-k} p^k$.

- Si $m + k < n$, c'est-à-dire si $m < n - k$, alors $P((L_1 = m) \cap (L_2 = k)) = p^{m+1}q^k + q^{m+1}p^k$.
D'où

$$\begin{aligned} P(L_2 = k) &= \sum_{m=1}^{n-k-1} p^{m+1}q^k + q^{m+1}p^k + p^{n-k}q^k + q^{n-k}p^k \\ &= p^2q^k \frac{1-p^{n-k-1}}{1-p} + q^2p^k \frac{1-q^{n-k-1}}{1-q} + p^{n-k}q^k + q^{n-k}p^k \\ &= p^2q^{k-1}(1-p^{n-k-1}) + q^2p^{k-1}(1-q^{n-k-1}) + p^{n-k}q^k + q^{n-k}p^k \\ &= p^2q^{k-1} - p^{n-k+1}q^{k-1} + q^2p^{k-1} - q^{n-k+1}p^{k-1} + p^{n-k}q^k + q^{n-k}p^k \\ &= p^2q^{k-1} + q^2p^{k-1} + p^{n-k}q^{k-1}(-p+q) + q^{n-k}p^{k-1}(-q+p). \end{aligned}$$

e) $P(L_2 = 0) = P(L_1 = n) = p^n + q^n$.

f) Vérifions que $\sum_{k=0}^{n-1} P(L_2 = k) = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} P(L_2 = k) &= p^2 \frac{1-q^{n-1}}{1-q} + q^2 \frac{1-p^{n-1}}{1-p} + (-p+q)p^{n-1} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1-\frac{q}{p}} + (-q+p)q^{n-1} \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}}{1-\frac{p}{q}} \\ &= p(1-q^{n-1}) + q(1-p^{n-1}) - (p^{n-1}-q^{n-1})p - (q^{n-1}-p^{n-1})q \\ &= p - pq^{n-1} + q - qp^{n-1} - p^n + pq^{n-1} - q^n + qp^{n-1} = p + q - p^n - q^n. \end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} P(L_2 = k) = p^n + q^n + p + q - p^n - q^n = p + q = 1$.

Le calcul précédent n'est valable que si $p \neq q$. Dans le cas $p = q = \frac{1}{2}$, il faut refaire le calcul (bien plus simple) et on obtient encore une somme égale à 1.

B. Étude du nombre de séries lors de n lancers

B.1) - $N_1(\Omega_1) = \{1\}$. $P(N_1 = 1) = 1$.

- $N_2(\Omega_2) = \{1, 2\}$. $P(N_2 = 1) = P((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)) = p^2 + q^2 = \frac{1}{2}$
 $P(N_2 = 2) = P((P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2)) = pq + qp = 2pq = \frac{1}{2}$. On vérifie que $p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2 = 1$.

- $N_3(\Omega_3) = \{1, 2, 3\}$. $P(N_3 = 1) = P((P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)) = p^3 + q^3 = \frac{1}{4}$.
 $P(N_3 = 2) = P((P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)) = 2p^2q + 2q^2p = \frac{1}{2}$.
 $P(N_3 = 3) = P((P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)) = p^2q + q^2p = \frac{1}{4}$.

On vérifie que $p^3 + q^3 + 2p^2q + 2q^2p + p^2q + q^2p = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p+q)^3 = 1$.

- $E(N_1) = 1$, $E(N_2) = \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $E(N_3) = \frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} = 2$.

B.2) $N_n(\Omega_n) = \{1, \dots, n\}$. $P(N_n = 1) = p^n + q^n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

$P(N_n = n) = p^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p^{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \frac{1}{2^{n-1}}$. ($\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière).

B.3) Fonctions génératrices de N_n

a) (Question de cours)

Le théorème de transfert dit que si X est une variable aléatoire prenant les valeurs x_k et f une fonction définie sur l'image de X alors $E(f(X)) = \sum_k f(x_k)P(X = x_k)$ (sous réserve de convergence).

Prenons $X = N_n$, $x_k = k$, k variant de 1 à n et $f : x \mapsto s^x$. Il vient :

$$E(s^{N_n}) = E(f(X)) = \sum_{k=1}^n f(x_k)P(X = x_k) = \sum_{k=1}^n s^k P(N_n = k).$$

Conclusion : Pour $s \in [0; 1]$ $G_n(s) = E(s^{N_n})$.

b) (Question de cours)

$$G'_n(s) = \sum_{k=1}^n P(N_n = k) k s^{k-1} \text{ donc } G'_n(1) = \sum_{k=1}^n k P(N_n = k) = E(N_n).$$

Conclusion : $G'_n(1)$ est l'espérance de N_n .

- c) • $(N_n = k) \cap P_n = ((N_n = k \cap P_n \cap P_{n-1}) \cup ((N_n = k \cap P_n \cap F_{n-1}))$, réunion de deux évènements incompatibles (P_{n-1} et F_{n-1} formant un système complet).
 Donc $P((N_n = k) \cap P_n) = P((N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1}) + P((N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1})$.
- On a $(N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1} = (N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n$ parce que :
 - Si $w \in (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1}$ alors les deux derniers lancers dans w étant identiques, ils font partie de la même série. Donc avant le lancer n , il y a le même nombre de séries qu'après le lancer n donc $N_{n-1}(w) = k$, donc $w \in (N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n$.
 - Réciproquement, si $w \in (N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n$ alors les deux derniers lancers étant identiques, le nombre de séries ne changent pas entre le lancer $n-1$ et le lancer n , donc $X_n(w) = k$, donc $w \in (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1}$.
 - On a $(N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1} = (N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n$ parce que :
 - Si $w \in (N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1}$ alors les deux derniers lancers dans w étant différents, ils se créent une nouvelle série par le lancer n . Donc $N_{n-1}(w) = k-1$, donc $w \in (N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n$.
 - Réciproquement, si $w \in (N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n$ alors les deux derniers lancers étant différents, le nombre de séries augmente de 1 entre le lancer $n-1$ et le lancer n , donc $X_n(w) = k$, donc $w \in (N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1}$.

On en tire que :

$$P((N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1}) = P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n) = P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1})P(P_n)$$

car les lancers sont indépendants. De même :

$$P((N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1}) = P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n) = P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})P(P_n).$$

$$\text{D'où } P((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}).$$

- On va utiliser la formule des probabilités totales en utilisant d'abord (F_n, P_n) comme système complet d'évènements puis (F_{n-1}, P_{n-1}) . En utilisant les résultats précédents et ceux donnés dans l'énoncé, il vient :

$$\begin{aligned} P(N_n = k) &= P((N_n = k) \cap P_n) + P((N_n = k) \cap F_n) \\ &= \left(\frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}) \right) \\ &= \frac{1}{2} (P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1})) \\ &\quad + \frac{1}{2} (P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) + P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1})). \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } P(N_n = k) = \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1).$$

d) Soit $n \geq 2$.

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^n P(N_n = k)s^k = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n P(N_{n-1} = k)s^k + \sum_{k=1}^n P(N_{n-1} = k-1)s^k \right).$$

Comme $P(N_{n-1} = n) = 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^n P(N_{n-1} = k)s^k = \sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k)s^k = G_{n-1}(s).$$

Comme $P(N_{n-1} = 0) = 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^n P(N_{n-1} = k-1)s^k = \sum_{k=2}^n P(N_{n-1} = k-1)s^k = \sum_{j=1}^n P(N_{n-1} = j)s^{j+1} = sG_{n-1}(s).$$

$$\text{Donc } G_n(s) = \frac{1}{2}G_{n-1}(s) + \frac{1}{2}sG_{n-1}(s) = \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s).$$

Or $G_1(s) = P(N_1 = 1)s = s$ et $(G_n(s))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$.

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad G_n(s) = s \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1}.$$

e) Soit $n \geq 2$. Il s'agit ici de calculer $E(N_n)$ c'est-à-dire d'après II.B.3.b) de calculer $G'_n(1)$.

D'après la question précédente, $E(N_n) = G'_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} + s(n-1)\frac{1}{2} \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2}$.

Donc $G'_n(1) = 1 + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$.

Remarque : pour $n = 2$, on retrouve bien $E(N_2) = \frac{3}{2}$ et $E(N_3) = 2$ de la question II.B.1)

EXERCICE 3 (extrait de CCP PC 2020)

Partie I - Calcul de p_n

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Chaque variable X_k modélise le pas de l'instant k , donc $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ modélise la position du pion à l'instant n (et cela reste valable pour $n = 0$ puisque $S_0 = 0$).

2. $p_0 = P(S_0 = 0) = 1$.

Comme $S_1(\Omega) = X_1(\Omega) = \{\pm 1\}$, on a $p_1 = P(S_1 = 0) = 0$.

Enfin, $p_2 = P(S_2 = 0) = P(X_1 + X_2 = 0)$.

L'évènement $(X_1 + X_2 = 0)$ est la réunion disjointe des évènements $(X_1 = 1) \cap (X_2 = -1)$ et $(X_1 = -1) \cap (X_2 = 1)$ donc :

$$\begin{aligned} p_2 &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = -1) + P(X_2 = -1 \cap X_1 = 1) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = -1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = 1) \quad (\text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Si n est impair, alors pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n \underbrace{X_k(\omega)}_{\in \{\pm 1\}}$ est la somme d'un nombre impair de

nombre impairs, donc est impair.

Par suite, $p_n = P(S_n = 0) = 0$, car l'évènement $(S_n = 0)$ est impossible (car 0 est un nombre pair).

4. On a $Y_k(\Omega) = \left(\frac{X_k+1}{2}\right)(\Omega) = \left\{\frac{1+1}{2}, \frac{-1+1}{2}\right\} = \{0, 1\}$.

De plus, $P(Y_k = 1) = P\left(\frac{X_k+1}{2} = 1\right) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$, et de même $P(Y_k = 0) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$, donc Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

5. • Les variables $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ suivent toutes une loi de Bernoulli et sont indépendantes, donc, pour tout $n > 0$, $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

Par suite, $Z_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$P(Z_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

• De plus,

$$Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}X_i + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{n}{2} = \frac{S_n + n}{2},$$

donc $S_n = 2Z_n - n$.

6. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $2m > 0$, donc, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} p_{2m} &= P(S_{2m} = 0) = P(2Z_{2m} - 2m = 0) = P(Z_{2m} = m) \\ &= \binom{2m}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}. \end{aligned}$$

Comme $\binom{0}{0} \frac{1}{4^0} = 1 = p_0$, ce résultat est encore valable pour $m = 0$ (on est obligé de distinguer les cas car l'énoncé n'a pas défini Z_n pour $n = 0$).

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|p_n| = P(S_n = 0) \leq 1$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} p_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de la série entière $\sum_{n \geq 0} 1x^n$, c'est-à-dire $R_p \geq 1$.

(En utilisant la règle de d'Alembert pour la série numérique $\sum p_{2m} x^{2m}$, il est facile de montrer que $R_p = 1$).

8. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^m \left(-\frac{1}{2} - k + 1 \right) &= \frac{1}{m!} \prod_{k=1}^m \left(-\left(-\frac{1}{2} - k + 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{m!} \prod_{k=1}^m \left(\frac{2k-1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{m! 2^m} \prod_{k=1}^m (2k-1) \\ &= \frac{1}{m! 2^m} \frac{\prod_{k=1}^m (2k-1) \prod_{k=1}^m (2k)}{\prod_{k=1}^m (2k)} \\ &= \frac{1}{m! 2^m} \frac{\prod_{k=1}^{2m} k}{2^m \prod_{k=1}^m k} \\ &= \frac{1}{m! 2^m} \frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2m)!}{m! m!} \frac{1}{2^m 2^m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m} = p_{2m}. \end{aligned}$$

9. D'après le cours, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (\alpha - k + 1) x^n.$$

Par suite, pour tout $x \in]-1; 1[$, comme $(-x^2) \in]-1; 1[$, on a

$$(1-x^2)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (\alpha - k + 1) (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=1}^n (\alpha - k + 1) x^{2n}.$$

Par ailleurs, avec les expressions trouvées pour p_n dans la partie précédente, on a, pour tout $x \in]-1; 1[$ (car $R_p \geq 1$) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n} x^{2n} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n+1} x^{2n+1}}_{=0} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n} x^{2n}. \end{aligned}$$

D'où, pour $\alpha = -1/2$, comme $p_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=1}^n (\alpha - k + 1)$ pour tout $n \geq 1$ d'après la question précédente, on a $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ pour tout $x \in]-1; 1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

10. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T = n \implies S_n = 0$, donc $(T = n) \subset (S_n = 0)$, donc $P(T = n) \leq P(S_n = 0)$.
Or, pour tout n impair, $P(S_n = 0) = 0$, donc, pour tout n impair, $q_n = P(T = n) = 0$. En particulier, pour $n = 1$, $q_1 = 0$.
- $S_1 = 0$ est impossible, donc, par définition de T , on a $T \geq 2$ et $T = 2 \iff S_2 = 0$, donc $q_2 = P(T = 2) = P(S_2 = 0) = p_2 = \frac{1}{2}$.

11. • Pour tout $x \in [-1; 1]$,

$$|g_n(x)| = |q_n x^n| = P(T = n) |x|^n \leq P(T = n),$$

donc $\|g_n\|_{\infty}^{[-1;1]} \leq P(T = n)$.

Or la série $\sum_{n \geq 0} P(T = n)$ converge (et vaut $1 - P(T = +\infty)$ car $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$), donc, par

comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 0} \|g_n\|_{\infty}^{[-1;1]}$ converge, c'est-à-dire que la série de fonctions

$\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1; 1]$.

• Comme $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1; 1]$, $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement sur $[-1; 1]$, ce qui assure que

$$R_q = \sup\{r > 0 \text{ tq } \sum_{n \geq 0} q_n r^n \text{ converge}\} \text{ est } \geq 1.$$

12. • Soient k, n deux entiers tels que $1 \leq k \leq n$.

On remarque déjà que :

$$(S_n = 0) \cap (T = k) = (T = k) \cap (X_{k+1} + \dots + X_n = 0) = (T = k) \cap (S_n - S_k = 0).$$

De plus :

$$(T = k) = (X_1 \neq 0) \cap (X_1 + X_2 \neq 0) \cap \dots \cap (X_1 + \dots + X_{k-1} \neq 0) \cap (X_1 + \dots + X_k = 0)$$

ou encore :

$$(T = k) = \left(\left(\sum_{i=1}^1 X_i, \sum_{i=1}^2 X_i, \dots, \sum_{i=1}^{k-1} X_i, \sum_{i=1}^k X_i \right) \in (\mathbb{Z}^*)^{k-1} \times \{0\} \right).$$

Comme $X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors selon le lemme des coalitions la variable aléatoire $\sum_{i=k+1}^n X_i$ est indépendante du vecteur aléatoire $\left(\sum_{i=1}^1 X_i, \sum_{i=1}^2 X_i, \dots, \sum_{i=1}^{k-1} X_i, \sum_{i=1}^k X_i \right)$.

Il en résulte que les événements $(T = k)$ et $(S_n - S_k = 0)$ sont indépendants donc

$$P((S_n = 0) \cap (T = k)) = P((S_n - S_k = 0) \cap (T = k)) = P(S_n - S_k = 0) P(T = k) \quad (*)$$

Il reste à établir que $P(S_n - S_k = 0) = P(S_{n-k} = 0)$ pour obtenir la relation de l'énoncé.

Pour cela, notons $A = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-k}) \in \{-1, 1\}^{n-k} \mid \sum_{i=1}^{n-k} x_i = 0 \right\}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} P(S_n - S_k = 0) &= P((X_{k+1}, \dots, X_n) \in A) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_{n-k}) \in A} P((X_{k+1} = x_1) \cap \dots \cap (X_n = x_{n-k})) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_{n-k}) \in A} \prod_{i=1}^k P(X_{k+i} = x_i) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_{n-k}) \in A} \prod_{i=1}^k P(X_i = x_i) \quad (\text{car les } X_j \text{ suivent la même loi}) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_{n-k}) \in A} P((X_1 = x_1) \cap \dots \cap (X_{n-k} = x_{n-k})) \\ &= P((X_1, \dots, X_{n-k}) \in A) = P(S_{n-k} = 0) \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la relation.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour $k > n$, $(T = k) \cap (S_n = 0) = (T = +\infty) \cap (S_n = 0) = \emptyset$.

La famille $((T = k))_{k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}}$ est un système complet d'événements, donc i selon la formule des probabilités totales, on a :

$$P(S_n = 0) = P((T = +\infty) \cap (S_n = 0)) + \sum_{k=1}^{+\infty} P((T = k) \cap (S_n = 0)) = 0 + \sum_{k=1}^n P((T = k) \cap (S_n = 0_d)).$$

Avec l'égalité précédente, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(S_n = 0) = \sum_{k=1}^n P(T = k)P(S_{n-k} = 0) \quad \text{soit} \quad p_n = \sum_{k=1}^n p_{n-k}q_k.$$

Notons (cela est important pour la question suivante) que, dans cette formule, on peut faire commencer la somme à $k = 0$ puisque $q_0 = 0$.

13. f et g sont deux fonctions développables en série entière au moins sur $] -1; 1[$, donc, par produit de Cauchy, fg est développable en série entière au moins sur $] -1; 1[$ et, pour tout $x \in] -1; 1[$,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n p_k q_{n-k} \right) x^n \\ &= \left(\sum_{k=0}^0 p_k q_{n-k} \right) x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n p_k q_{n-k} \right) x^n \\ &= p_0 q_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \quad (\text{d'après la relation de Q12 pour tout } n \in \mathbb{N}^*) \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \\ &= -1 + p_0 x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \\ &= -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = -1 + f(x). \end{aligned}$$

14. • Comme, pour tout $x \in] -1; 1[$, $f(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ (d'après la question 9), la relation obtenue à la question précédente devient :

$$\forall x \in] -1; 1[, \quad (1 - x^2)^{-1/2} g(x) = (1 - x^2)^{-1/2} - 1,$$

donc, en multipliant de part et d'autre par $\sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{1/2}$, on a bien, pour tout $x \in] -1; 1[$,

$$g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}.$$

- Pour tout $x \in] -1; 1[$,

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (\alpha - k + 1) x^n,$$

donc, pour $\alpha = 1/2$, on a, pour tout $x \in] -1; 1[$, comme $(-x^2) \in] -1; 1[$,

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} - k + 1 \right) (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} - k + 1 \right) x^{2n},$$

donc

$$g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} - k + 1 \right) x^{2n},$$

où le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

15. Pour tout $x \in] -1; 1[$,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} - k + 1 \right) x^{2n},$$

donc, par unicité du développement en série entière sur $] -1; 1[$, on a :

$$q_0 = 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} - k + 1 \right) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad q_{2n+1} = 0.$$

16. • Comme $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a

$$P(T = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n 1^n = 1 - g(1).$$

• Or, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[-1; 1]$ et $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1; 1]$ (d'après la question 11), la fonction $g = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est continue sur $[-1; 1]$.

En particulier, elle est continue en 1, donc

$$\begin{aligned} g(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \sqrt{1 - x^2} \quad (\text{d'après l'expression trouvée en 14}) \\ &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

• On a donc $P(T = +\infty) = 1 - g(1) = 0$, donc l'événement $T = +\infty$ est quasi impossible, donc on est quasi certain que le pion reviendra à l'origine à un instant donné.

17. Puisque $P(T = +\infty) = 0$, on peut considérer que $T(\Omega) = \mathbb{N}$ et alors $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(T = n)$ est la série génératrice de T .

D'après le cours, T admet une espérance si et seulement si g est dérivable en 1. Or, pour tout $x \in]-1; 1[$, $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, donc g est dérivable sur $]-1; 1[$ et, pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty.$$

g est continue sur $[-1; 1]$, dérivable sur $]-1; 1[$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) = +\infty$, donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, g n'est pas dérivable en 1, et, par suite, T n'admet pas d'espérance.
