CORRIGÉ ENAC 2014

PARTIE I

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$: on peut invoquer, par exemple, le fait qu'il ne contient pas la matrice nulle.

On sait d'après le cours que $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\times)$ est un groupe, mais que ce groupe n'est pas commutatif dès que $n \geqslant 2$.

Q1 : Réponses B,D

---

2. A. B. Si $i \neq j$, la matrice $\mathrm{I}+\mathrm{E}_{i,j}$ est triangulaire avec des « 1 » sur la diagonale, donc a pour déterminant 1 et est inversible.
De plus, on a $(\mathrm{I}+\mathrm{E}_{i,j})(\mathrm{I}-\mathrm{E}_{i,j}) = \mathrm{I}-\mathrm{E}_{i,j}^2 = \mathrm{I}$, puisque $\mathrm{E}_{i,j}^2 = 0$ lorsque $i \neq j$ (je rappelle la formule générale $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\mathrm{E}_{i,\ell}$). Ainsi $\left(\mathrm{I}+\mathrm{E}_{i,j}\right)^{-1} = \mathrm{I}-\mathrm{E}_{i,j}$.

C. D. $\mathrm{I}+\mathrm{E}_{i,i}$ a pour déterminant 2, et est donc inversible. Étant diagonale, son inverse est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les inverses de ses éléments diagonaux, donc celle avec $\frac{1}{2}$ à la place de 2, c'est-à-dire $\mathrm{I}-\frac{1}{2}\mathrm{E}_{i,i}$.

Q2 : Réponses A,C

---

3. Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qui commute avec toutes les matrices inversibles. Alors, d'après la question précédente, elle commute avec toutes les matrices $\mathrm{I}+\mathrm{E}_{i,j}$ donc avec toutes les matrices $\mathrm{E}_{i,j}$ (car elle commute avec I). On a donc

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ , \ \mathrm{A}.\mathrm{E}_{i,j} = \mathrm{E}_{i,j}.\mathrm{A}.$$

En écrivant A dans la base canonique : $\mathrm{A} = \sum_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2} a_{k,\ell}\mathrm{E}_{k,\ell}$ on a donc

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ , \ \sum_{k,\ell} a_{k,\ell}\mathrm{E}_{k,\ell}\mathrm{E}_{i,j} = \sum_{k,\ell} a_{k,\ell}\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell}$$

soit

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ , \ \sum_{k,\ell} a_{k,\ell}\delta_{\ell,i}\mathrm{E}_{k,j} = \sum_{k,\ell} a_{k,\ell}\delta_{j,k}\mathrm{E}_{i,\ell} \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\mathrm{E}_{k,j} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{j\ell}\mathrm{E}_{i,\ell}.$$

Dans la première somme, le coefficient de la matrice $\mathrm{E}_{i,j}$ est égal à $a_{i,i}$ et dans la seconde, il est égal à $a_{j,j}$. Par unicité de l'écriture dans une base, on en déduit $a_{i,i} = a_{j,j}$ pour tous i,j.
De plus, si $k \neq i$, aucune matrice $\mathrm{E}_{k,j}$ ne figure dans la seconde somme, on en déduit donc $a_{k,i} = 0$.

Finalement, la matrice A est une matrice scalaire (de la forme $\alpha\mathrm{I}$). La réciproque est immédiate (une matrice scalaire commute avec toutes les autres), donc le centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est exactement l'ensemble des matrices scalaires, de la forme $\alpha\mathrm{I}$ ou encore $\alpha\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}_{i,i}$.

Q3 : Réponse C

---

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$. On a

$$Y = PX \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-t = x' \\ -x+z+t = y' \\ x+y-z = z' \\ y-z+t = t' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-t = x' \\ \quad y+z = x'+y' \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ \quad -z+t = z'-x' \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ y-z+t = t' \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-t = x' \\ \quad y+z = x'+y' \\ \quad -z+t = z'-x' \\ \quad -2z+t = -x'-y'+t' \quad (L_4 \leftarrow L_4 - L_2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-t = x' \\ \quad y+z = x'+y' \\ \quad -z+t = z'-x' \\ \quad\quad -t = x'-y'-2z'+t' \quad (L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3) \end{cases} :$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -x'+y'+3z'-2t' \\ y = x'-z'+t' \\ z = y'+z'-t' \\ t = -x'+y'+2z'-t' \end{cases}$$

Le système ayant une solution unique, la matrice P est inversible, de plus, $Y = PX \Longleftrightarrow X = P^{-1}Y$ donc on obtient la matrice $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Q4 : Réponse B

---

5. *Remarque : la phrase de l'énoncé est incomplète ; je pense qu'il faut lire « Une matrice* A *est dite nilpotente* ***d'ordre k*** *si* $A^k = 0$ *et* $A^{k-1} \neq 0$... *»*

A. C. Ces deux réponses sont fausses comme le montre l'exemple des deux matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(*Je vous laisse le soin de démontrer cependant que la somme de deux matrices nilpotentes* ***qui commutent*** *est nilpotente*.

B. Là encore, il est facile de montrer que le produit de deux matrices nilpotentes **qui commutent** est nilpotente.

Ce n'est cependant pas le cas en général : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui n'est pas nilpotente. La réponse B est donc inexacte.

D. Réponse exacte ; l'indice de nilpotence d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est inférieur à la dimension de l'espace.
En effet, si u est nilpotent d'indice k, soit x_0 n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} u^{k-1}$ (c'est possible puisque $u^{k-1} \neq 0$). Alors il est facile de montrer que la famille $\left\{x_0, u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{k-1}(x_0)\right\}$ est libre ; son cardinal, k, est donc inférieur à la dimension de l'espace.

Q5 : Réponse D

PARTIE II

6. Calcul immédiat.

Q6 : Réponse D

---

7. Soit x_0 un élément de $[0,1]$ où f atteint son maximum (il existe car f continue sur un segment, cf. théorème du cours), c'est-à-dire $f(x_0) = 1$.

La continuité de f en x_0 s'écrit :

« Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour tout $x \in \mathrm{V} \cap [0,1]$ on a : $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. »

On aura donc en particulier, pour $x \in \mathrm{V} \cap [0,1]$: $1 - \varepsilon \leqslant f(x)$: c'est la réponse B.

On a alors puisque $f(t) \leqslant 1$ pour tout $t \in [0,1]$: $u_n(f) \leqslant 1$ mais aussi

$$u_n(f) \geqslant \left(\int_u^v |f(t)|^n \,\mathrm{d}t\right)^{1/n} \geqslant \left(\int_u^v (1-\varepsilon)^n \,\mathrm{d}t\right)^{1/n} = (v-u)^{1/n}(1-\varepsilon).$$

En résumé : $(v-u)^{1/n}(1-\varepsilon) \leqslant u_n(f) \leqslant 1$, ce qui montre déjà que les réponses A et C sont fausses.

De plus, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (v-u)^{1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(v-u)} = 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (v-u)^{1/n}(1-\varepsilon) = 1-\varepsilon$, ce qui implique, par définition de la limite, qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, on a $(v-u)^{1/n}(1-\varepsilon) \geqslant 1-2\varepsilon$.

En conclusion, on a montré :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geqslant n_0 \Longrightarrow 1 - 2\varepsilon \leqslant u_n(f) \leqslant 1$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(f) = 1$.

Q7 : Réponses B,D

---

8. Si g est la fonction nulle, on a pour tout n $u_n(g) = 0 = \mathrm{M}$, donc A et C sont vérifiées.

Sinon, on applique le résultat de la question précédente à $f : x \mapsto \dfrac{|g(x)|}{\mathrm{M}}$. Puisque $u_n(f) = \dfrac{1}{\mathrm{M}} u_n(g)$ d'après la question 6, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(f) = 1$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(g) = \mathrm{M}$. C'est la réponse A, mais puisque $|\mathrm{M}| = \mathrm{M}$, la réponse C est elle aussi exacte !

Q8 : Réponses A,C

PARTIE III

9. Puisque $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$ pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on aura $\cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$ puis $\mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$ pour tout n, donc la suite (I_n) est décroissante. C'est la réponse B, mais la réponse D est elle aussi exacte en prenant $n_0 = 0$!

Remarque : il est dommage que l'énoncé parle de « la suite I_n » au lieu de : « la suite (I_n) »...

Q9 : Réponses B,D

---

10. Calcul immédiat.

Q10 : Réponses B,C

---

11. On fait une intégration par parties, pour $n \geqslant 2$:

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos t}_{u'} . \underbrace{(\cos t)^{n-1}}_{v} \,\mathrm{d}t = \underbrace{\Big[\sin t . \cos^{n-1} t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t} \cos^{n-2} t \,\mathrm{d}t$$

donc $\mathrm{I}_n = (n-1)(\mathrm{I}_{n-2} - \mathrm{I}_n)$ ce qui donne $\mathrm{I}_n = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$ ou encore $\mathrm{I}_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q11 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

12. A. B. Posons $u_n = n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. Alors, en utilisant la relation de récurrence précédente,

$$v_{n+1} = (n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n = (n+1)\cdot\frac{n}{n+1}\mathrm{I}_{n-1}\cdot\mathrm{I}_n = v_n.$$

La suite (v_n) est donc constante et, puisque $v_1 = \mathrm{I}_1\mathrm{I}_0 = \frac{\pi}{2}$, on en déduit

$$\forall n \geqslant 1\ ,\ n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

Cela implique bien sûr la réponse A.

C. D. La suite (I_n) étant décroissante et à valeurs strictement positives, l'inégalité $\mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{I}_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ implique

$$\forall n \geqslant 1\ ,\ \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_{n-1}} \leqslant \frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-1}} \leqslant 1$$

et, compte tenu de la relation de récurrence précédente :

$$\forall n \geqslant 1\ ,\ \frac{n}{n+1} \leqslant \frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-1}} \leqslant 1.$$

Il en résulte immédiatement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-1}} = 1$.

Q12 : Réponses A,C

---

13. $n(\mathrm{I}_n)^2 = (n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1})\left(\frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-1}}\right)$ donc les résultats ci-dessus impliquent $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\mathrm{I}_n)^2 = \frac{\pi}{2}$.

On en tire $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, et en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

Q13 : Réponse B

---

14. D'après la question 11, pour $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{I}_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\mathrm{I}_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\mathrm{I}_{2n-4} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{(2n)(2n-2)\ldots 2}\mathrm{I}_0 = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{(2n)(2n-2)\ldots 2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Q14 : Réponse C

---

15. D'après la question 13, $\mathrm{I}_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_{2n}\sqrt{n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Cela s'écrit aussi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1.3\ldots(2n-3)(2n-1)}{2.4\ldots(2n-2)(2n)}\frac{\pi}{2}\sqrt{n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1.3\ldots(2n-3)(2n-1)}{2.4\ldots(2n-2)(2n)}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Et puisque $\frac{2n+1}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{n}$ on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)(2n+1)}{2.4\ldots(2n-2)(2n)}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

Q15 : Réponse B

---

16. $\mathrm{F}_1(x) = \int_0^x \tan t\,\mathrm{d}t = [-\ln|\cos t|]_0^x = -\ln\cos x$ puisque $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Aucune des réponses A et B n'est exacte.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x - x) = \left(1+\tan^2 x\right) - 1 = \tan^2 x$ donc $\mathrm{F}_2(x) = \tan x - x$.

Q16 : Réponse C

---

17. $\mathrm{F}_{n+2}(x)+\mathrm{F}_n(x)=\displaystyle\int_0^x \underbrace{\tan^n t}_{u^n}\underbrace{\left(1+\tan^2 t\right)}_{u'}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\tan^{n+1} t}{n+1}\right]_0^x=\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\cdot$

Q17 : Réponse C

---

18. Calcul immédiat compte tenu des 2 questions précédentes.

Q18 : Réponse B

---

19. Puisque $0\leqslant \tan t\leqslant 1$ pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ on aura $\tan^{n+1} t\leqslant \tan^n t$ puis $\mathrm{J}_{n+1}\leqslant \mathrm{J}_n$ pour tout n, donc la suite (J_n) est décroissante.
Étant minorée par 0, elle est donc convergente.

Q19 : Réponse B

---

20. D'après la relation de Chasles, $\mathrm{J}_n=\displaystyle\int_0^a(\tan t)^n\,\mathrm{d}t+\int_a^{\frac{\pi}{4}}(\tan t)^n\,\mathrm{d}t$.

Pour $t\in[0,a]$, $(\tan t)^n\leqslant(\tan a)^n$ donc $\displaystyle\int_0^a(\tan t)^n\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^a(\tan a)^n\,\mathrm{d}t=a(\tan a)^n$.

Pour $t\in\left[a,\frac{\pi}{4}\right]$, $(\tan t)^n\leqslant 1$ donc $\displaystyle\int_a^{\frac{\pi}{4}}(\tan t)^n\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}-a$.
En rassemblant tous ces résultats, on obtient $\mathrm{J}_n\leqslant a(\tan a)^n+\frac{\pi}{4}-a$: c'est la réponse B.

Mais il y a un PIÈGE ! En effet, puisque pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $(\tan t)^n\leqslant 1$, on a aussi $\mathrm{J}_n\leqslant\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}+a$, donc la réponse D, bien qu'inutile, est aussi exacte.

Q20 : Réponses B,D

---

21. Quand $n\to+\infty$, puisque $0\leqslant\tan a<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(\tan a)^n=0$ et il résulte de l'inégalité précédente que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n\leqslant\dfrac{\pi}{4}-a$. Cela étant vrai pour tout $a\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$, on en tire $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n\leqslant 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n=0$.

Q21 : Réponse C

---

22. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathrm{J}_n+\mathrm{J}_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan t)^n(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}$$

Donc

$$\mathrm{J}_{2n+2}=\frac{1}{2n+1}-\mathrm{J}_{2n}=\frac{1}{2n+1}-\left(\frac{1}{2n-1}-\mathrm{J}_{2n-2}\right)=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}+\left(\frac{1}{2n-3}-\mathrm{J}_{2n-4}\right)$$

etc... jusqu'à $\mathrm{J}_2=1-\mathrm{J}_0=1-\dfrac{\pi}{4}$.
Ainsi : $\mathrm{J}_{2n+2}=\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n-1}+\ldots+(-1)^n\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$. En multipliant cette relation par $(-1)^n$, on obtient la réponse D.

Q22 : Réponse D

---

23. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{J}_{2n+2}=0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right)=\dfrac{\pi}{4}$: c'est la réponse D.
Mais la réponse D est aussi exacte, puisqu'il s'agit de la même suite au rang précédent !

Q23 : Réponses C,D

PARTIE IV

24. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k^p=\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{pk}=\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^p)^k$. Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison ω^p et de premier terme 1, donc cette somme est égale à n si $\omega^p=1$ et à $\dfrac{1-(\omega^p)^n}{1-\omega^p}$ sinon.
Remarque : cette dernière expression vaut 0 puisque $\omega^n=1$!

Q24 : Réponses B,C

---

25. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega_k=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega^k=(1+\omega)^n-\omega^n=(1+\omega)^n-1$ d'après la formule du binôme (il manque le terme correspondant à $k=n$).
Or $1+\omega=1+\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}}\right)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}}$ d'où $(1+\omega)^n=2^n\cos^n\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-2^n\cos^n\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ donc finalement :

Q25 : Réponse D

---

26. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\omega_k=\prod_{k=1}^{n-1}\omega^k=\omega^{\sum_{k=1}^{n-1}k}$. Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{(n-1)n}{2}$ donc $\omega^{\sum_{k=1}^{n-1}k}=\left(\omega^{n/2}\right)^{n-1}$ avec $\omega^{n/2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1$ donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\omega_k=(-1)^{n-1}$.

Q26 : Réponse B

---

27. Résultats immédiats par la formule du binôme.

Q27 : Réponses B,C

---

28. **A. B.** Puisque $j^2=\overline{j}$ on a d'après la formule du binôme

$$(1+j^2)^n=(1+\overline{j})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\overline{j}^k$$

donc aucune des réponses A et B n'est exacte.

C. D. En combinant les calculs précédents :

$$\mathrm{Z}_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+j^k+\overline{j}^k\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+j^k+j^{2k}\right)$$

donc aucune des réponses C et D n'est exacte.

Q28 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

29. Dans la formule ci-dessus, on découpe la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ en trois parties, selon la congruence de k modulo 3.

- Pour $k \equiv 0 \pmod 3$, on pose $k = 3p$ avec p entier positif tel que $3p \leqslant n$ soit $p \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{n}{3}\right)$;
- Pour $k \equiv 1 \pmod 3$, on pose $k = 3p+1$ avec p entier positif tel que $3p+1 \leqslant n$ soit $p \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{n-1}{3}\right)$;
- Pour $k \equiv 2 \pmod 3$, on pose $k = 3p+2$ avec p entier positif tel que $3p+2 \leqslant n$ soit $p \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{n-2}{3}\right)$.

On obtient donc

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(1 + j^k + j^{2k}\right) \\ &= \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/3)} \binom{n}{3p}\left(1 + j^{3p} + j^{6p}\right) + \sum_{p=0}^{\mathrm{E}((n-1)/3)} \binom{n}{3p+1}\left(1 + j^{3p+1} + j^{6p+2}\right) + \sum_{p=0}^{\mathrm{E}((n-2)/3)} \binom{n}{3p+2}\left(1 + j^{3p+2} + j^{6p+4}\right) \end{aligned}$$

d'où :

Q29 : Réponse D

---

30. On continue le calcul, en utilisant $j^3 = 1$, donc $j^{3p} = j^{6p} = 1$, $1 + j^{3p+1} + j^{6p+2} = 1 + j + j^2 = 0$ et $1 + j^{3p+2} + j^{6p+4} = 1 + j^2 + j^4 = 1 + j^2 + j = 0$ d'où finalement

$$Z_n = 3\sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/3)} \binom{n}{3p}.$$

Q30 : Réponse A

---

31. Puisque $1 + j^2$ est le conjugué de $1 + j$, on a

$$(1+j)^n + (1+j^2)^n = 2\mathcal{Re}\left((1+j)^n\right)$$

donc aucune des réponses A et B n'est exacte.

Puis : $(1+j)^n = \left(1 + \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\left(\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right)\right)^n = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}}$: c'est la réponse C.

De plus, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ donc, plus simplement, $(1+j)^n = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}}$: on aurait pu d'ailleurs directement utiliser la relation $1 + j = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$! et la réponse D est exacte puisque $(1+j^2)^n$ est le conjugué de $(1+j)^n$.

Q31 : Réponses C,D

---

32. **A. B.** D'après ce qui précède :

$$(1+j)^n + (1+j^2)^n = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}n\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

donc aucune des réponses A et B n'est exacte.

C. D. On a donc :

$$3\sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/3)} \binom{n}{3p} = Z_n = 2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n = 2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

ce qui correspond à la réponse C.

Q32 : Réponse C

PARTIE V

33. Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = 3(j^2 - j) = -3i\sqrt{3}$, donc est non nul, et le système est de Cramer. Donc :

Q33 : Réponse B

---

34. En additionnant les trois lignes du système, puisque $1+j+j^2=0$, on obtient directement $3x = a+b+c$; puis en multipliant la deuxième ligne par j et la troisième par j^2, on obtient $3z = a+bj+cj^2$; enfin, en multipliant la deuxième ligne par j^2 et la troisième par j, on trouve $3y = a+bj^2+cj$.

Q34 : Réponse C

---

35. Supposons que le système admette une solution $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On utilise les formules démontrées à la question précédente.
On a alors nécessairement $x+y+z$ réel, donc a réel.
On en déduit que $b+c$ et $bj+cj^2$ doivent être réels. $b+c$ réel implique $\mathscr{I}m(b) = -\mathscr{I}m(c)$, donc il existe α, β, γ réels tels que $b = \alpha + i\gamma$ et $c = \beta - i\gamma$.
Mais alors $bj+cj^2 = \alpha j + \beta j^2 + i\gamma(j-j^2) = \alpha j + \beta j^2 - \gamma\sqrt{3}$ est réel si et seulement si $\alpha j + \beta j^2$ l'est, donc s'il existe δ réel tel que $\alpha j + \beta j^2 = \delta = -\delta(j+j^2)$. La famille $\left\{j, j^2\right\}$ étant linéairement indépendante dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, cela implique $\alpha = \beta$ soit $b = \overline{c}$.

On obtient donc les conditions de la réponse B ; la réciproque est immédiate.

Q35 : Réponse B

---

36. Puisque $c = \overline{b}$, $bj^2 + cj = bj^2 + \overline{bj^2} = 2\mathscr{R}e(bj^2)$ et $bj + cj^2 = bj + \overline{bj} = 2\mathscr{R}e(bj)$ donc les formules de la question 34.C donnent la réponse A.

Q36 : Réponse A

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆