

INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

L'objet de ce chapitre est d'étendre la notion d'intégrale au cas des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I qui n'est pas un segment c'est-à-dire de la forme :

$$]a; b], [a; b[,]-\infty; b],]-\infty; b[, [a; +\infty[,]a; +\infty[,]a; b[\text{ ou }]-\infty; +\infty[$$

avec $-\infty < a < b < +\infty$.

Toutes les applications considérées ici sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Intégrales généralisées : définitions

Déf 1:

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a; b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\int_a^b f(t) dt$ converge (ou existe) si :

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt \text{ existe.}$$

S'il en est ainsi, cette intégrale est notée :

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{ou} \quad \int_a^b f.$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f$ diverge.

Rem: Si F est une primitive de f , on a, pour tout $x \in [a; b[$, $\int_a^x f(t) dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$.

Dire que l'intégrale converge signifie donc que $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ existe.

Exemples

1. $\int_0^1 \frac{dt}{1-t}$ est divergente.

 **Solution:**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est continue sur $[0; 1[$, et pour tout $x \in [0; 1[$, $\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$, donc l'intégrale diverge.

2. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente.

 **Solution:**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $[1; +\infty[$, et pour tout $x \geq 1$, $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc l'intégrale diverge.

3. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.

 **Solution:**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \geq 0$, $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arc tan } x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$, donc l'intégrale converge et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

4. $\int_0^{+\infty} e^{at} dt$ (avec $a \in \mathbb{R}$) converge si et seulement si $a < 0$.

 **Solution:**

$$\left| \text{car } \int_0^x e^{at} dt = \begin{cases} x & \text{si } a = 0 \\ \frac{1}{a} (e^{ax} - 1) & \text{sinon} \end{cases}, \text{ et cette expression a une limite lorsque } x \rightarrow +\infty \text{ si et seulement si } a < 0. \right.$$

Rem : Lorsqu'on écrit par exemple « Étudier la nature de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ » ou « L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ diverge », le terme $\int_a^b f(t) dt$ n'existe pas en tant que nombre ; il s'agit juste d'un symbole et il est impossible de l'utiliser dans les calculs tant que l'on n'a pas prouvé son existence, c'est-à-dire la convergence de l'intégrale.

Prop 1: Intégrale faussement impropre

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; b[$ avec a et b finis, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si f admet une limite finie en b^- , alors l'intégrale $\int_a^b f$ converge.

De plus, si on note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité en b , on a :

$$\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}.$$

Démonstration:

Il est clair que l'application $\tilde{f}$ est c.p.m sur le segment $[a; b]$. On peut donc définir l'intégrale $\int_a^b \tilde{f}$. Pour tout $x \in [a; b[$ on a alors $\int_a^x f = \int_a^x \tilde{f}$, et, puisque l'application $x \mapsto \int_a^x \tilde{f}$ est continue sur $[a; b]$ (cf. chapitre précédent), on a $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f = \int_a^b \tilde{f}$, d'où le résultat.

Exemple

Étude de $\int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$.

Solution:

L'application $f: t \mapsto \frac{\ln t}{1-t}$ est continue sur $[\frac{1}{2}; 1[$. On sait de plus que $\ln t \sim t - 1$ donc $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = -1$. La fonction f se prolonge donc en une fonction continue sur $[\frac{1}{2}; 1]$, et son intégrale existe.

Rem : Le résultat précédent s'applique uniquement lorsque b est un réel fini !

Par exemple, pour $f: t \mapsto \frac{1}{t}$ on a bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ mais $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

Prop 2:

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et soit $c \in]a; b[$. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_c^b f(t) dt$ converge et, dans ce cas :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Autrement dit, pour une fonction continue par morceaux sur $[a; b[$, l'existence de l'intégrale est une notion locale au voisinage de b .

Pour cette raison, on utilise souvent l'expression : « l'intégrale converge en b ».

Démonstration:

Pour tout $x \in [a; b[$ on a d'après la relation de Chasles : $\int_a^x f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^x f(t) dt$, donc il suffit de faire tendre x vers b^- .

Déf 2:

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $]a; b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\int_a^b f(t) dt$ converge (ou existe) si :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt \text{ existe.}$$

S'il en est ainsi, cette intégrale est notée : $\int_a^b f(t) dt$ ou $\int_a^b f$.

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f$ diverge.

Rem: On obtient dans ce cas des résultats analogues à ceux des propositions 1 et 2 : notion d'intégrale faussement impropre en a , et l'intégrabilité est une notion locale au voisinage de a^+ .

Exemples

1. $\int_0^1 \ln t dt$ est convergente et vaut -1 .

 **Solution:**

La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0; 1]$, et pour $x > 0$, $\int_x^1 \ln t dt = [t \ln t - t]_x^1 = x - 1 - x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -1$.
Cela prouve que l'intégrale converge et vaut -1 .

2. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est convergente et vaut 2.

 **Solution:**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0; 1]$, et pour $x > 0$, $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 2$.
Cela prouve que l'intégrale converge et vaut 2.

Déf 3:

Soit f une application continue par morceaux sur un intervalle $]a; b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe $c \in]a; b[$ tel que les intégrales généralisées $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent.
- (ii) Pour tout $c \in]a; b[$, les intégrales généralisées $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent.

Si tel est le cas, la somme des deux intégrales généralisées : $\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$ ne dépend pas de c . On la note :

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{ou} \quad \int_a^b f$$

et on dit alors que l'intégrale généralisée $\int_a^b f$ converge.

On dira donc que l'intégrale $\int_a^b f$ diverge s'il existe $c \in]a; b[$ tel que l'une au moins des intégrales $\int_a^c f(t) dt$ ou $\int_c^b f(t) dt$ diverge.

 **Démonstration:**

Relation de Chasles.

Rem: Avec les hypothèses de la définition précédente, soit F une primitive de f sur $]a; b[$ et soit $c \in]a; b[$.

Dire que l'intégrale $\int_a^c f$ existe équivaut à dire que $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ existe; et dans ce cas, on a $\int_a^c f = F(c) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$.

Dire que l'intégrale $\int_c^b f$ existe équivaut à dire que $\lim_{y \rightarrow b^-} F(y)$ existe; et dans ce cas, on a $\int_c^b f = \lim_{y \rightarrow b^-} F(y) - F(c)$.

Ainsi, dire que $\int_a^b f$ existe équivaut à dire que F admet une limite en a^+ et b^- ; et dans ce cas, on aura

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\substack{x \rightarrow a^+ \\ y \rightarrow b^-}} [F(t)]_x^y = \lim_{b^-} F - \lim_{a^+} F$$

que l'on notera parfois abusivement $[F(t)]_a^b$ (mais cette écriture n'est autorisée *qu'après* avoir justifié l'existence des deux limites).

Exemples

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente, et vaut π .

 **Solution:**

En effet, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \int_x^y \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arc tan } y - \text{Arc tan } x \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

2. $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ est convergente et vaut π .

 **Solution:**

En effet, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $] -1; 1[$ et

$$\forall (x, y) \in] -1; 1[, \int_x^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{Arc sin } y - \text{Arc sin } x \xrightarrow[y \rightarrow 1]{x \rightarrow -1} \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est divergente.

 **Solution:**

En effet, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente (car $\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$), mais $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ est divergente (car $\int_x^1 \frac{dt}{t^2} = -1 + \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$).

Attention!

-  1. On prendra garde à ne pas simplifier outrageusement la définition! Par exemple, il ne faut pas confondre $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$ (qui diverge!) avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x t dt$ (qui vaut 0).

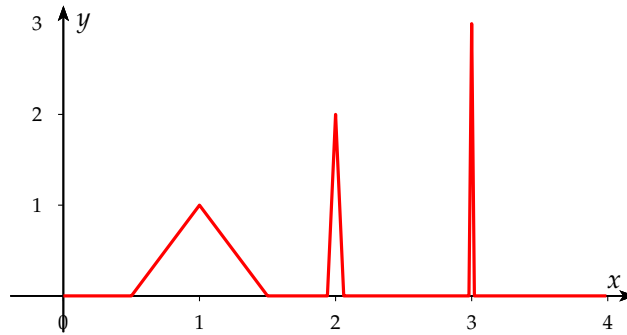
Lorsqu'on calcule $\lim_{\substack{x \rightarrow a^+ \\ y \rightarrow b^-}} \int_x^y f(t) dt$, il est important que les variables x et y soient indépendantes.

-  2. Contrairement à ce qui se passe pour les séries, il se peut que $\int_a^{+\infty} f$ converge *sans que* $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ soit nulle!!

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

- f est continue et affine par morceaux.
- $f(0) = 0$
- pour tout entier $n \geq 1$, $f\left(n - \frac{1}{2n^3}\right) = f\left(n + \frac{1}{2n^3}\right) = 0$ et $f(n) = n$

La courbe représentative de f est donc la suivante :



Alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge (et vaut $\frac{\pi^2}{12}$). Cependant, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ n'existe pas ! Pire, f n'est même pas bornée sur $\mathbb{R}_+$!

II. Intégrales généralisées : propriétés

Les propriétés qui suivent sont énoncées dans le cas d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle de la forme $[a; b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. On obtient bien sûr des résultats analogues pour les deux autres cas d'intégrale généralisée.

Prop 3:

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a; b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et λ et μ deux scalaires.

On suppose que les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent.

Alors l'intégrale généralisée $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt$ converge et :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

En d'autres termes : le sous-ensemble de $\mathcal{C}_m([a; b], \mathbb{K})$ formé des fonctions dont l'intégrale converge est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_m([a; b], \mathbb{K})$, et sur cet espace, l'application $f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire.

Démonstration:

| découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale sur un segment et de la linéarité de la limite.

Remarques :

1. Il résulte immédiatement de la proposition précédente que, si f a une intégrale divergente sur $[a; b[$ et g une intégrale convergente, alors l'intégrale de $f + g$ sera divergente.

On ne peut cependant rien dire a priori de la somme de deux intégrales divergentes.

- ⚡ 2. On fera très attention à ne pas écrire $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ avant d'avoir étudié la convergence de ces deux intégrales !

Par exemple, l'écriture

~~$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}}_{\text{CV}} = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}}_{\text{DV}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+1}}_{\text{DV}}$$~~

N'A AUCUN SENS!!!

Prop 4:

1. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$, à valeurs réelles.
Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ et si l'intégrale de f est convergente, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
2. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a; b]$, à valeurs réelles.
Si $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a; b]$ et si les intégrales de f et de g convergent, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

 Démonstration:

immédiat, compte tenu de la propriété similaire pour les intégrales sur un segment et du théorème de prolongement des inégalités pour les limites.

Prop 5:

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, à valeurs réelles positives, telle que l'intégrale de f sur $[a; b]$ est convergente.

Alors : $\int_a^b f(t) dt = 0 \implies f = 0$ sur $[a; b]$.

 Démonstration:

Soit $x \in [a; b]$. Puisque $\int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f$, que $\int_a^x f$ est positive d'après les propriétés des intégrales sur un segment et que $\int_x^b f$ est positive d'après la proposition précédente, l'égalité $\int_a^b f = 0$ implique $\int_a^x f = 0$. Il ne reste plus alors qu'à appliquer le théorème correspondant pour les intégrales sur un segment.

Prop 6:

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Pour que l'intégrale de f sur $[a; b]$ soit convergente, il faut et il suffit que les intégrales de $\operatorname{Re}(f)$ et de $\operatorname{Im}(f)$ le soient, et, dans ce cas on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt.$$

 Démonstration:

immédiat compte tenu de la propriété similaire pour les intégrales sur un segment et des propriétés des limites.

Corollaire 6.1:

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente, il en est de même de $\int_a^b \overline{f(t)} dt$ et on a :

$$\int_a^b \overline{f(t)} dt = \overline{\int_a^b f(t) dt}.$$

III. Cas des fonctions positives

Étudier la nature d'une intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$, avec f continue par morceaux sur $[a; b]$, est facile lorsqu'on sait déterminer une primitive F de f . En effet, dans ce cas, il suffit de calculer la limite de F en b^- .

Cela est malheureusement rarement le cas; l'idée est alors de comparer la fonction f à des fonctions de référence, comme on l'a fait pour les séries numériques.

Comme pour les séries, on commence par établir ces critères dans le cas de fonctions à valeurs réelles positives.

En effet, si $f: [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs positives, l'application $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est croissante sur $[a; b[$. D'après le théorème de la limite monotone, sa limite en b^- existe si et seulement si elle est majorée. On obtient donc le théorème suivant, élémentaire mais fondamental puisqu'il est à l'origine de toutes les règles de comparaison qui vont suivre :

Théorème 1:

Soit f continue par morceaux sur $[a; b[$, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, à valeurs réelles positives.

Soit F l'application $F: \begin{cases} [a; b[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_a^x f(t) dt. \end{cases}$

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si F est majorée.

Dans ce cas, $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a)$.

Dans le cas contraire, $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = +\infty$.

Rem: Dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a; b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$ et à valeurs réelles positives, la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est *décroissante* (vérification facile). Elle admet donc une limite en a^+ si et seulement si elle est majorée : on obtient donc un résultat tout à fait similaire. Pour cette raison, les théorèmes de comparaison qui vont suivre restent entièrement valables dans le cas où l'intervalle d'intégration est de la forme $]a; b]$.

On déduit facilement de ce théorème le premier critère de comparaison :

Théorème 2:

Soient f et g continues par morceaux sur $[a; b[$, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $c \in [a; b[$ tel que :

$$\forall t \in [c; b[, 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

Alors :

1. Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge (et on a alors $\int_c^b f \leq \int_c^b g$).
2. Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

 Démonstration:

Il suffit de démontrer la première propriété, puisque la seconde en est simplement la contraposée.

Pour tout $x \in [c; b[$, notons $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ et $G(x) = \int_c^x g(t) dt$.

Si on suppose que $\int_a^b g$ converge on aura alors :

$$\forall x \in [c; b[, F(x) \leq G(x) \leq \int_c^b g(t) dt \quad (\text{car } g \geq 0).$$

Ainsi, la fonction F est majorée; f étant à valeurs positives sur $[c; b[$, on déduit du théorème 1 que l'intégrale $\int_c^b f(t) dt$ converge.

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est donc aussi convergente d'après la proposition 2.

Exemple important

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge.

 Solution:

On commence par remarquer que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$; le problème de l'intégrabilité se situe donc au voisinage de $+\infty$.

Or, pour $x \geq 1$, $x \leq x^2$ donc $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

Et puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ existe (déjà vu), le résultat découle directement du théorème précédent.

Rem: L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ s'appelle *l'intégrale de Gauss*. Elle est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (voir démonstration en exercice).

Corollaire 2.1:

Soient f et g continues par morceaux sur $[a; b[$, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, à valeurs réelles, positives au voisinage de b .

1. Si $f = O(g)$ et si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.
2. Si $f = o(g)$ et si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Démonstration:

Il suffit de démontrer la première propriété, puisque $f = o(g) \implies f = O(g)$.

Dire que $f = O(g)$ s'écrit :

$$\exists c \in [a; b[, \exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall x \in [c; b[, |f(x)| \leq M |g(x)|.$$

Mais puisque f et g sont à valeurs positives, cela s'écrit simplement $f(x) \leq M g(x)$ pour $x \in [c; b[$.

Donc si l'intégrale de g converge, puisque l'intégrale de Mg converge aussi, il découle directement du théorème 2 que l'intégrale de f converge.

Rem: Comme la nature d'une intégrale ne change pas si on multiplie la fonction par un scalaire, on peut, dans les hypothèses de ce corollaire, remplacer la phrase « f et g sont positives au voisinage de b » par « f et g sont de signes constants au voisinage de b ».

Corollaire 2.2:

Soient f et g continues par morceaux sur $[a; b[$, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, à valeurs réelles.

On suppose g positive au voisinage de b . S'il existe une constante réelle $k \neq 0$ telle que $f \underset{b-}{\sim} kg$, alors les intégrales de f et g sur $[a; b[$ sont de même nature.

Démonstration:

Quitte à changer f en $-f$ (ce qui ne change pas la nature de l'intégrale), on peut supposer $k > 0$.

Par définition, on a : $f \underset{b-}{\sim} kg \iff f - g = o(g)$, ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a; b[\text{ tq } \forall x \in [c; b[, |f(x) - kg(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

g étant à valeurs positives, cela peut aussi s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a; b[\text{ tq } \forall x \in [c; b[, -\varepsilon g(x) \leq f(x) - kg(x) \leq \varepsilon g(x)$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a; b[\text{ tq } \forall x \in [c; b[, (k - \varepsilon)g(x) \leq f(x) \leq (k + \varepsilon)g(x).$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{k}{2}$ (ce qui est possible car $k > 0$), on obtient finalement

$$\exists c \in [a; b[\text{ tq } \forall x \in [c; b[, \frac{k}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3k}{2}g(x)$$

et le résultat est donc une conséquence immédiate du théorème 2.

Fonctions de référence

Pour pouvoir utiliser ces critères de comparaison, il faut connaître un certain nombre d'intégrales de référence. Celles qui sont au programme sont les suivantes :

1. Fonctions de Riemann

Il s'agit des fonctions $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ pour $t > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 3:

- a) $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- b) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration:

immédiate en utilisant une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, qui est égale à $\ln t$ si $\alpha = 1$ et à $\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ sinon.

Le premier résultat de ce théorème peut se généraliser en un autre point que 0 :

Prop 7:

Soient a et b des réels tels que $a < b$. Alors :

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \quad \text{converge si et seulement si} \quad \alpha < 1.$$

2. Exponentielle et logarithme

Théorème 4:

- a) $\int_0^1 \ln t \, dt$ converge (et $\int_0^1 \ln t \, dt = -1$).
- b) $\int_0^{+\infty} e^{-at} \, dt$ converge si et seulement si $a > 0$ (et dans ce cas $\int_0^{+\infty} e^{-at} \, dt = \frac{1}{a}$).

 *Démonstration:*

Là encore, le résultat est immédiat en utilisant des primitives.

Exercices d'application

1. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$.

 *Solution:*

• *Existence :*

La fonction $f: t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est continue sur $[0; +\infty[$ (théorèmes usuels puisque $1+t^3$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$).

Au voisinage de $+\infty$, $f(t) \sim \frac{1}{t^3}$; puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ existe (intégrale de Riemann avec l'exposant $3 > 1$), les théorèmes de comparaison pour les fonctions positives permettent de conclure à l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$.

• *Calcul :*

On commence par faire une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{1+X^3} = \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{1}{3(X+1)} + \frac{-X+2}{3(X^2-X+1)}$$

(je n'ai pas détaillé les calculs, à savoir faire). On en déduit, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} &= \frac{1}{3} \int_0^x \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3} \int_0^x \frac{-t+2}{t^2-t+1} dt \\ &= \frac{1}{3} \ln(x+1) + \frac{1}{3} \int_0^x \frac{-\frac{1}{2}(2t-1) + \frac{3}{2}}{t^2-t+1} dt \\ &= \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{t^2-t+1} \\ &= \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\text{Arc tan} \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^x \\ &= \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\text{Arc tan} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{1}{6} \ln \left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\text{Arc tan} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit : } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

2. Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t} dt$.

 *Solution:*

Déjà, la fonction $f: t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues. On peut aussi remarquer qu'elle est positive.

• *Étude au voisinage de 0*

On sait que $1 - e^{-t} \sim t$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$; la fonction f est donc prolongeable par continuité en 0, donc l'intégrale de f au voisinage de 0 existe.

• *Étude au voisinage de $+\infty$*

Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$, on a $f(t) \sim \frac{1}{t}$; or l'intégrale de $t \mapsto \frac{1}{t}$ au voisinage de $+\infty$ est divergente, donc par comparaison de fonctions positives, il en est de même de celle de f .

Conclusion : l'intégrale proposée diverge.

3. Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$.

 Solution:

La fonction $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (composée de telles fonctions), et positive.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} = 0$, donc $e^{-\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$; puisque la fonction positive $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de Riemann avec un exposant $2 > 1$), il en est de même de la fonction $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$.

Conclusion : l'intégrale proposée converge.

4. Nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}} dx$.

 Solution:

La fonction $f: x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$ est continue sur $]0; 1[$, comme quotient de fonctions continues. De plus, elle est de signe constant (négative) sur cet intervalle.

• *Étude au voisinage de 0*

On commence par simplifier le problème : $f(x) \sim \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. On en déduit ensuite, à l'aide des croissances comparées, que

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{3/4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/4} \ln x = 0$. Donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right)$. Et puisque la fonction positive $x \mapsto \frac{1}{x^{3/4}}$ est intégrable au voisinage de 0 (fonction de Riemann avec un exposant $3/4 < 1$), il en est de même de f .

• *Étude au voisinage de 1*

On commence par simplifier le problème : $f(x) \sim \frac{\ln x}{(1-x)^{3/2}}$. On en déduit, puisque $\ln x \sim x-1$, que $f(x) \sim -\frac{1}{(1-x)^{1/2}}$.

Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ existe : c'est l'intégrale au voisinage de 1 d'une fonction de Riemann avec l'exposant $1/2 < 1$.

Par comparaison de fonctions de signes constants, on en déduit que l'intégrale de f au voisinage de 1 existe.

Conclusion : l'intégrale proposée converge.

5. Intégrales de Bertrand

Étudier, selon la valeur des réels α et β l'existence des intégrales

$$\text{a) } \int_0^{1/e} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} \quad \text{b) } \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

 Solution:

a) Quels que soient α et β , la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$ est continue sur $]0; 1/e]$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues.

On distingue alors selon la position de α par rapport à 1, en comparant f à une fonction de Riemann.

• *Cas $\alpha < 1$*

Soit γ un réel tel que $\alpha < \gamma < 1$; alors $x^\gamma f(x) = x^{\gamma-\alpha} |\ln x|^{-\beta} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ par croissances comparées puisque $\gamma - \alpha > 0$.

Il en résulte que $f(x) = o\left(\frac{1}{x^\gamma}\right)$. Et puisque $x \mapsto \frac{1}{x^\gamma}$ est une fonction de Riemann positive intégrable au voisinage de 0, l'intégrale de f existe.

• *Cas $\alpha > 1$*

Soit γ un réel tel que $\alpha > \gamma > 1$; alors $x^\gamma f(x) = \frac{1}{x^{\alpha-\gamma} |\ln x|^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ par croissances comparées puisque $\alpha - \gamma > 0$.

Par définition de la limite, on en déduit qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel on a $x^\gamma f(x) \geq 1$, c'est-à-dire $f(x) \geq \frac{1}{x^\gamma}$. Puisque $\gamma > 1$ l'intégrale de la fonction de Riemann positive $x \mapsto \frac{1}{x^\gamma}$ diverge, et par comparaison, l'intégrale de f aussi.

- Cas $\alpha = 1$

Dans ce cas, $f(x) = \frac{1}{x |\ln x|^\beta} = \frac{1}{x} (-\ln x)^{-\beta}$. On reconnaît ici une expression de la forme $u' u^{-\beta}$, on peut donc calculer une primitive de f . Plus précisément, pour $\varepsilon \in]0; \frac{1}{e}]$ on a :

$$\int_{\varepsilon}^{1/e} \frac{1}{x} (-\ln x)^{-\beta} dx = \begin{cases} [\ln |\ln x|]_{\varepsilon}^{1/e} & \text{si } \beta = 1 \\ \left[-\frac{(-\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1} \right]_{\varepsilon}^{1/e} & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \varepsilon = -\infty$, l'expression ci-dessus possède une limite finie quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ si et seulement si $\beta > 1$.

Conclusion : l'intégrale $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

- b) On procède de la même façon pour l'étude des intégrales de Bertrand au voisinage de $+\infty$.

Il faut retenir le principe : si α est différent de 1, on introduit un réel γ compris strictement entre 1 et α , et en calculant la limite de $x^\gamma f(x)$, on compare $f(x)$ à la fonction de Riemann $\frac{1}{x^\gamma}$. Et dans le cas $\alpha = 1$, on calcule directement une primitive de f .

Le résultat à obtenir est le suivant :

l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

↔ Les intégrales de Bertrand interviennent dans de nombreux calculs ; il est donc important de savoir démontrer leur convergence.

Attention : ces intégrales ne font pas partie des intégrales de référence figurant dans le programme officiel, vous ne pouvez donc pas utiliser les résultats démontrés ci-dessus directement !

6. Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta} dx$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

 Solution:

Quels que soient α et β , la fonction $f: x \mapsto \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (pour $\beta \leq 0$ et $\alpha \geq 0$ elle est même continue en 0, mais inutile de distinguer ce cas).

- Étude au voisinage de 0

- Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$ donc $f(x) \sim \frac{x^\alpha}{x^{\beta-\alpha}} = \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$, donc par comparaison avec une fonction de Riemann, f est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\beta - \alpha < 1$.
- Si $\alpha = 0$, $f(x) = \frac{\ln 2}{x^\beta}$, donc f est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\beta < 1$ (ce cas peut donc être intégré au cas précédent).
- Si $\alpha < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$ donc $f(x) \sim \frac{\ln(x^\alpha)}{x^\beta} = \alpha \frac{\ln x}{x^\beta}$. D'après l'exemple des intégrales de Bertrand au voisinage de 0, on « sait » que $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\beta} dx$ converge si et seulement si $\beta < 1$ (au concours, il faut le redémontrer !). Par comparaison de fonctions positives, il en est de même pour l'intégrale de f .
- Les 3 cas précédents peuvent être regroupés ainsi :

$$\int_0^1 f \text{ converge} \iff \beta < \max(1 + \alpha, 1).$$

- Étude au voisinage de $+\infty$

- Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$ donc $f(x) \sim \alpha \frac{\ln x}{x^\beta}$. D'après l'exemple des intégrales de Bertrand au voisinage de $+\infty$, on « sait » que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} dx$ converge si et seulement si $\beta > 1$. Par comparaison de fonctions positives, il en est de même pour l'intégrale de f .
- Si $\alpha = 0$, $f(x) = \frac{\ln 2}{x^\beta}$, donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$.
- Si $\alpha < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$ donc $f(x) \sim \frac{x^\alpha}{x^{\beta-\alpha}} = \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$, donc par comparaison avec une fonction de Riemann, f est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\beta - \alpha > 1$.
- Les 3 cas précédents peuvent être regroupés ainsi :

$$\int_1^{+\infty} f \text{ converge} \iff \beta > \min(1 + \alpha, 1).$$

Conclusion : l'intégrale proposée converge si et seulement si $\min(1 + \alpha, 1) < \beta < \max(1 + \alpha, 1)$.

IV. Techniques de calcul d'une intégrale généralisée

IV.1. Utilisation de primitives

Il s'agit de la façon la plus simple pour étudier et calculer une intégrale généralisée et c'est celle que nous avons utilisée jusqu'à présent ; elle consiste à revenir simplement à la définition :

Si f est continue par morceaux sur $]a; b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, et si F est une primitive de f , alors f est intégrable sur $]a; b[$ si et seulement si F admet des limites finies en a^+ et en b^- , et on a alors :

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

Exemple

Montrer que la fonction $x \mapsto \ln \frac{1}{x-x^2}$ est intégrable sur $]0; 1[$ et calculer son intégrale.

Solution:

On note déjà que la fonction considérée est continue sur $]0; 1[$, par les théorèmes usuels.

Soient alors ε et x dans $]0; 1[$.

$$\int_{\varepsilon}^x \ln \frac{1}{t-t^2} dt = \int_{\varepsilon}^x \left(-\ln t - \ln(1-t) \right) dt = \left[-t \ln t + t + (1-t) \ln(1-t) - 1 + t \right]_{\varepsilon}^x$$

$$= F(x) - F(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad F(x) = -x \ln x + (1-x) \ln(1-x) + 2x - 1$$

$$\lim_0 F = -1; \lim_1 F = 1; \text{ d'où : } \int_0^1 \ln \frac{1}{x-x^2} dx \text{ existe et vaut } 2.$$

IV.2. Changement de variable

On peut étendre aux intégrales sur un intervalle quelconque la formule de changement de variable vue pour les intégrales sur un segment ; la seule restriction, pour garantir l'existence des intégrales écrites, est que le changement de variable effectué soit bijectif ; cette restriction n'en est pas vraiment une, car on a de toutes façons intérêt lorsqu'on réalise un changement de variable à ce qu'il soit bijectif.

Théorème 5:

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ à valeurs réelles ou complexes, et φ une bijection strictement monotone d'un intervalle $]a; b[$ sur $]\alpha, \beta[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a; b[$.

Alors l'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} f$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_a^b (f \circ \varphi) \varphi'$ l'est, et, dans ce cas :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_a^b f \circ \varphi(u) \cdot \varphi'(u) du.$$

Démonstration:

Supposons par exemple φ strictement croissante.

Pour tout segment $[x; y]$ inclus dans $]a; b[$, on a d'après le théorème sur le changement de variable pour l'intégration sur un segment :

$$\int_x^y f \circ \varphi(u) \cdot \varphi'(u) du = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} f(t) dt.$$

Puisque φ est une bijection strictement croissante, $x \rightarrow a$ si et seulement si $\varphi(x) \rightarrow \alpha$ et $y \rightarrow b$ si et seulement si $\varphi(y) \rightarrow \beta$. D'où le résultat par définition de la convergence d'une intégrale généralisée, en passant à la limite.

Exemples

1. Soit f continue par morceaux sur $]a; b[$. Alors l'intégrale de f en a^+ existe si et seulement si l'intégrale de $t \mapsto f(a+t)$ en 0^+ existe.

Solution:

Immédiat : faire le changement de variable $x = a + t$ dans $\int_a^b f(x) dx$. Ce changement de variable étant affine réalise bien une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone de $]a; b[$ sur $]0; b-a[$.

On retrouve ainsi le résultat : $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ existe si et seulement si l'intégrale de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ existe en 0^+ c'est-à-dire si et seulement si $\alpha < 1$.

On aurait évidemment un résultat similaire en b^- .

2. Soit $f:]-a; a[\rightarrow \mathbb{K}$, paire et continue par morceaux. Alors $\int_{-a}^a f(t) dt$ existe si et seulement si $\int_0^a f(t) dt$ existe, et, dans ce cas : $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.

 **Solution:**

Déjà, si l'intégrale $\int_{-a}^a f(t) dt$ converge, alors les deux intégrales $\int_0^a f(t) dt$ et $\int_{-a}^0 f(t) dt$ convergent, par définition d'une intégrale doublement impropre (définition 3).

Puis, si l'intégrale $\int_0^a f(t) dt$ existe, alors le changement de variable affine $u = -t$, qui réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $[0; a[$ sur $]-a; 0]$ permet de montrer, compte tenu de la parité de f , que l'intégrale $\int_{-a}^0 f(t) dt$ existe et lui est égale, d'où le résultat.

3. $\int_0^\pi \frac{dx}{2 + \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

 **Solution:**

La fonction $x \mapsto \frac{1}{2 + \cos x}$ est continue sur $[0; \pi]$ puisque le dénominateur ne s'annule pas, donc l'intégrale proposée existe (intégrale d'une fonction continue sur un segment!).

Remarquons que, compte tenu de la proposition 1, on peut dire que l'intégrale proposée est aussi celle de cette fonction sur l'intervalle semi-ouvert $[0; \pi[$.

L'application $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle $[0; \pi[$ sur $[0; +\infty[$; si l'on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a $x = 2 \operatorname{Arc tan} t$ d'où $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$ et $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ donc on a (les intégrales impropres écrites ci-après convergent nécessairement en vertu du théorème 5) :

$$\int_0^\pi \frac{dx}{2 + \cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{(1+t^2)\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{t^2 + 3} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc tan} \left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \pi$.

 **Solution:**

Pour $x \in]a; b[$ posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$. Pour tout $x \in]a; b[$, $(b-x)(x-a) > 0$ donc f est continue (et positive) sur $]a; b[$.

De plus, quand $x \rightarrow a^+$, $f(x) \sim \frac{cste}{x-a+1/2}$ donc par comparaison avec une fonction de Riemann (exposant $\frac{1}{2} < 1$), f est intégrable au voisinage de a . Et il en est de même au voisinage de b .

On écrit alors le trinôme $(b-x)(x-a)$ sous forme canonique :

$$(b-x)(x-a) = -x^2 + (a+b)x - ab = -\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + ab - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Le changement de variable $y = x - \frac{a+b}{2}$, qui est un changement de variable affine donc licite, donne alors :

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2}} = \left[\operatorname{Arc sin} \left(\frac{y}{\frac{b-a}{2}} \right) \right]_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} = \pi.$$

5. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = 0$.

 **Solution:**

Bien sûr, on commence par démontrer (rapidement) l'existence de l'intégrale proposée :

- La fonction $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions continues ;

- Au voisinage de 0, $f(x) \sim \ln x$, et on sait que $\int_0^1 \ln x \, dx$ existe (intégrale de référence). Par comparaison de fonctions de signes constants au voisinage de 0, il en est de même de $\int_0^1 f$.
- Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$, donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$. Par comparaison avec la fonction de Riemann $x \mapsto \frac{1}{x^{3/2}}$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ puisque $\frac{3}{2} > 1$, on en déduit que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Dans l'intégrale $\int_{[0;1]} f$, on fait le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, qui réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0;1]$ sur $[1;+\infty[$. On obtient :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + 1} \frac{dt}{t^2} = - \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1 + t^2} dt$$

donc finalement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = 0.$$

IV.3. Intégration par parties

Théorème 6:

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a; b[$. Si $\lim_{x \rightarrow b^-} f(t)g(t)$ existe, alors les intégrales $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature, et, lorsqu'elles convergent, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = \lim_{t \rightarrow b^-} f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

ce que l'on écrit encore : $\int_a^b f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt$.

Démonstration:

Il suffit de passer à la limite dans la relation :

$$\int_a^x f'(t)g(t) dt = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(t)g'(t) dt$$

Remarques

1. Ce théorème se généralise sans difficulté au cas d'un intervalle de la forme $]a; b]$ (il faut alors que $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)g(t)$ existe) ou au cas d'un intervalle de la forme $]a; b[$ (et il faut alors que les deux limites $\lim_{t \rightarrow b^-} f(t)g(t)$ et $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)g(t)$ existent).
2. Pour appliquer ce théorème il est *indispensable* de vérifier proprement l'existence de la limite. En cas de doute, on reviendra à la formule sur un segment, et à la fin des calculs on fera un (ou des) passage(s) à la limite (que l'on justifiera bien sûr!).

Exemples

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Solution:

L'existence de cette intégrale ne doit pas poser de problème!

Rapidement : la fonction $f: t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$, et au voisinage de $+\infty$: $f(t) \sim \frac{1}{t^4}$, avec $t \mapsto \frac{1}{t^4}$ positive et intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de Riemann).

Pour le calcul, on commence par utiliser l'astuce « classique » en écrivant : $1 = (1+t^2) - t^2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2) - t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2}.$$

Il est important de noter que l'on a bien le droit de « couper l'intégrale en deux » car toutes les intégrales écrites sont convergentes (considérer un équivalent en $+\infty$).

La première de ces intégrales est immédiate :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arc tan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour calculer la seconde, on va faire une intégration par parties, en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$, soit $v(t) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2}$. Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ existe, ce qui justifie l'écriture :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = \left[-\frac{t}{2(1+t^2)} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 0 + \frac{\pi}{4}.$$

En rassemblant les deux résultats précédents, on obtient finalement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

2. Existence et valeur de $\int_0^1 t^n \ln t \, dt$ ($n \in \mathbb{N}$).

 **Solution:**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n: t \mapsto t^n \ln t$ est continue sur $]0;1]$.

Pour $n = 0$, $f_0(t) = \ln t$, et on sait que l'intégrale $\int_0^1 \ln t \, dt$ existe et vaut -1 (intégrale de référence).

Pour $n \geq 1$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_n(t) = 0$, donc f_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$, donc son intégrale existe.

Pour calculer l'intégrale, on fait une intégration par parties en posant $u'(t) = t^n$, soit $u(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$, et $v(t) = \ln t$. Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$, et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées. On peut donc écrire :

$$\int_0^1 t^n \ln t \, dt = \left[\frac{t^{n+1} \ln t}{n+1} \right]_{t \rightarrow 0}^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \frac{dt}{t} = 0 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n \, dt = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

3. Pour tout entier n : $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt = n!$.

 **Solution:**

L'existence de cette intégrale ne doit pas poser de problème!

Rapidement : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n: t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0; +\infty[$, et par croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f_n(t) = 0$ c'est-à-dire $f_n(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ positive et intégrable au voisinage de $+\infty$...

Notons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on fait une intégration par parties avec $u(t) = t^n$ et $v'(t) = e^{-t}$ soit $v(t) = -e^{-t}$.

Lorsque $t = 0$, l'expression $t^n e^{-t}$ est égale à 0 puisque $n \geq 1$, et $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^n e^{-t} = 0$ par croissances comparées, donc :

$$I_n = \underbrace{[-t^n e^{-t}]_0^{+\infty}}_{=0} + n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} \, dt = n I_{n-1}.$$

Puisque $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = 1$, on en déduit par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.

4. Montrer que $\int_0^1 -e^{-x} \ln x \, dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} \, dx$.

 **Solution:**

L'existence de l'intégrale est quasi-immédiate puisque $e^{-x} \ln x \sim_{x \rightarrow 0} \ln x$.

On fait une intégration par parties en posant $u'(x) = -e^{-x}$ et $v(x) = \ln x$. Mais si l'on choisit $u(x) = e^{-x}$, alors le produit $u(x)v(x)$ tend vers $-\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$, donc les hypothèses du théorème d'intégration par parties ne sont pas vérifiées!!

L'astuce consiste à utiliser une autre primitive de u' ; puisque ces primitives diffèrent toutes d'une constante, il faut bien choisir cette constante. Ici, on choisira $u(x) = e^{-x} - 1$, car de cette façon $u(x) \sim_{x \rightarrow 0} -x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées. On a donc :

$$\int_0^1 -e^{-x} \ln x \, dx = \underbrace{[(e^{-x} - 1) \ln x]_{x \rightarrow 0}^1}_{=0} - \int_0^1 (e^{-x} - 1) \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} \, dx.$$

V. Intégrales absolument convergentes

Lorsqu'une fonction n'est pas à valeurs réelles positives (ou de signe constant), les théorèmes de comparaison vus plus haut ne s'appliquent pas. On peut cependant s'y ramener dans certains cas grâce à la définition et au théorème suivants :

Déf 4:

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a; b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente.

Remarques

1. On a bien sûr une définition analogue dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a; b]$ ou $]a; b[$.
2. Dans la définition ci-dessus, $|f(t)|$ désigne la valeur absolue de $f(t)$ si f est à valeurs réelles, et son module si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Théorème 7:

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a; b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si l'intégrale $\int_a^b f$ est absolument convergente, alors elle est convergente, et on a :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Démonstration:

- Premier cas : f est à valeurs réelles

Notons alors, pour tout $t \in [a; b[$:

$$f^+(t) = \max(f(t), 0) \quad \text{et} \quad f^-(t) = \max(-f(t), 0)$$

de sorte que

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-$$

Puisque $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$, il résulte des théorèmes de comparaison pour les fonctions positives que les intégrales

$\int_a^b f^+$ et $\int_a^b f^-$ existent.

Puisque $f = f^+ - f^-$, l'intégrale de f sur $[a; b[$ existe donc.

- Cas général

Lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, puisque $|\operatorname{Re}(f)| \leq |f|$ et $|\operatorname{Im}(f)| \leq |f|$, il résulte des théorèmes de comparaison que les intégrales de $\operatorname{Re}(f)$ et de $\operatorname{Im}(f)$ sont absolument convergentes.

D'après la première partie, elles sont donc convergentes, et on en conclut que $\int_a^b f$ converge aussi.

Exemples

1. Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin t}{t} dt$.

Solution:

La fonction $f: t \mapsto \frac{e^{-t} \sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On remarque qu'elle n'est pas de signe constant.

Puisque $\sin t \sim t$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} \sin t}{t} = 1$; f se prolonge donc par continuité en 0, et l'intégrale est faussement impropre au voisinage de 0.

On « sait » que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \leq |t|$ (cette inégalité est classique, et doit être connue; pour la démontrer, le plus simple est d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\sin$ sur $[0; t]$).

On en déduit que : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(t)| \leq e^{-t}$. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction de référence), il en est de même de $|f|$ par les théorèmes de comparaison pour les fonctions positives (d'ailleurs, cet argument suffit, l'étude en 0 était inutile!).

Ainsi, l'intégrale de f sur $\mathbb{R}_+$ est absolument convergente, donc convergente.

2. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t \, dt$. **Solution:**

La fonction $t \mapsto e^{-t} \sin t$ est continue sur $[0; +\infty[$, et la convergence absolue de l'intégrale est immédiate grâce à l'inégalité $|e^{-t} \sin t| \leq e^{-t}$.

L'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto e^{-t} e^{it}$ est également absolument convergente (puisque $|e^{it}| = 1$), donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t \, dt &= \Im \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{it} \, dt \right) = \Im \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-1)t} \, dt \right) \\ &= \Im \left(\left[\frac{1}{i-1} e^{(i-1)t} \right]_0^{+\infty} \right). \end{aligned}$$

Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(i-1)t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} e^{it} = 0$ puisque la fonction $t \mapsto e^{it}$ est bornée, donc finalement :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t \, dt = \Im \left(\frac{1}{1-i} \right) = \frac{1}{2}.$$

 **Rem :** La réciproque du théorème précédent est *fausse*.

Il existe en effet des intégrales qui sont convergentes sans être absolument convergentes (une telle intégrale est dite semi-convergente).

Le contre-exemple est classique et doit être connu :

Exemple important

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ est convergente mais pas absolument convergente.

 **Démonstration:**

- Montrons d'abord la convergence de l'intégrale. Cet exemple étant important, je vais donner deux méthodes pour ce faire.

On commence déjà par remarquer que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et qu'elle se prolonge par continuité en 0 ($\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$), donc l'intégrale est faussement impropre au voisinage de 0.

Pour montrer que l'intégrale proposée converge, on revient à la définition, et il reste donc à montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt$ existe.

- 1^{ère} méthode

Cette méthode consiste à considérer la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \, dt$.

On pose donc

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt \stackrel{u=t-n\pi}{=} (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin u}{u+n\pi} \, du.$$

Montrons alors que la série de terme général u_n vérifie le CSSA :

- Puisque $\sin u$ est positif sur $[0; \pi]$, la suite (u_n) est alternée.
- L'inégalité $u + n\pi \leq u + (n+1)\pi$ implique que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.
- Enfin, pour tout $n \geq 1$, on a $|u_n| \leq \int_0^\pi \left| \frac{\sin u}{u+n\pi} \right| \, du \leq \int_0^\pi \frac{1}{n\pi} \, du = \frac{1}{n}$, ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La série $\sum u_n$ est donc convergente. Cela signifie que la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente; or pour $n \geq 1$ on a $S_{n-1} = \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt$ par la relation de Chasles; on a donc établi l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt = \ell$.

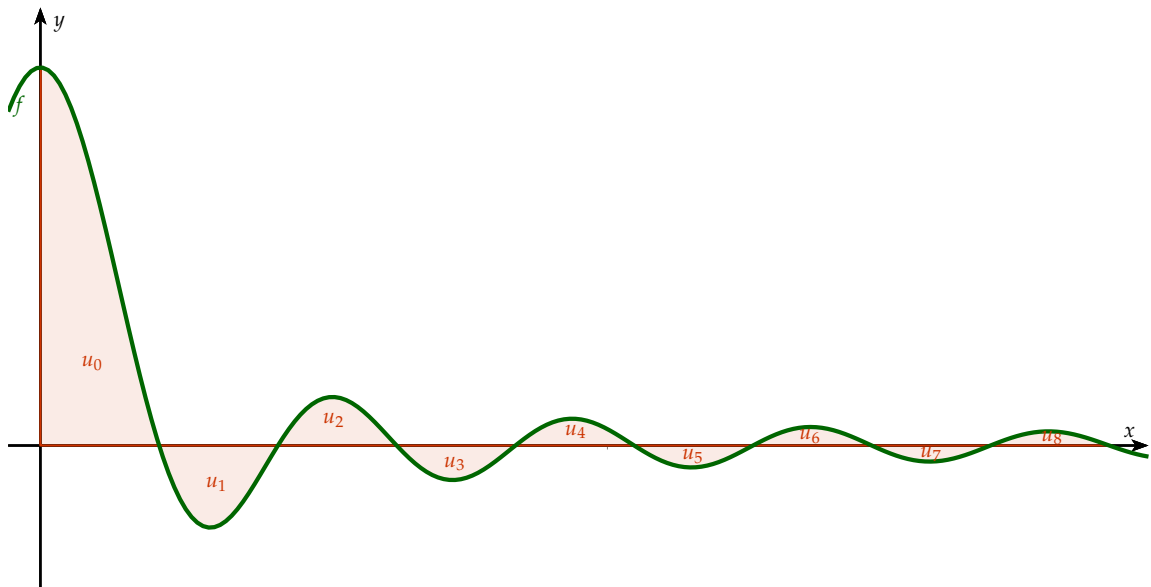
Si maintenant x est un réel $\geq \pi$ quelconque, soit $n_x = \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor$, de sorte que $n_x \pi \leq x < (n_x + 1)\pi$ avec n_x entier ≥ 1 . Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt - \int_0^{n_x \pi} \frac{\sin t}{t} \, dt \right| &= \left| \int_{n_x \pi}^x \frac{\sin t}{t} \, dt \right| \\ &\leq \int_{n_x \pi}^x \left| \frac{\sin t}{t} \right| \, dt \leq \int_{n_x \pi}^{(n_x+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| \, dt = |u_{n_x}| \leq \frac{1}{n_x}. \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, il en est de même de n_x , donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt - \int_0^{n_x \pi} \frac{\sin t}{t} \, dt \right| = 0$ d'où l'on déduit

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt = \ell$. Cela prouve la convergence de l'intégrale.

La méthode est illustrée par le graphique ci-dessous.



• 2ème méthode

Cette méthode consiste à faire une intégration par parties de $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$, en posant $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = \sin t$. Mais si l'on choisit comme primitive la fonction $v(t) = -\cos t$, on ne peut pas faire l'intégration par parties puisque $\lim_{t \rightarrow 0} u(t)v(t)$ n'est pas finie ! L'astuce (déjà vue) consiste ici à utiliser comme primitive la fonction $v(t) = 1 - \cos t$. En effet, puisque $1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}$, on aura $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$ donc on peut écrire :

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^x + \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{1 - \cos x}{x} + \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt.$$

Or il est facile de vérifier que la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque continue, positive, prolongeable en 0 ($\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$), et majorée par $\frac{2}{t^2}$.

Il en résulte que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ existe, et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ (car $1 - \cos$ bornée), on en déduit que l'intégrale proposée converge et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt.$$

↔ L'idée utilisée dans cette méthode est importante à retenir : puisque l'inégalité $\left| \frac{\sin t}{t} \right| \leq \frac{1}{t}$ ne suffit pas pour conclure (car $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$), on fait une intégration par parties pour augmenter le degré du dénominateur et obtenir ainsi, par comparaison avec une fonction de Riemann, une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$.

- Montrons que l'intégrale n'est pas absolument convergente, c'est-à-dire que $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ diverge.

Comme il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive, cela revient à démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = +\infty$, et pour cela il

suffit de démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = +\infty$.

En reprenant les notations de la 1ère méthode vue ci-dessus, cela revient à démontrer que la série de terme général

$$|u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \int_0^\pi \frac{\sin u}{u + n\pi} du$$

diverge.

Et cela est immédiat, puisque $|u_n| \geq \int_0^\pi \frac{\sin u}{(n+1)\pi} du = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin u du = \frac{2}{(n+1)\pi}$.

Ainsi, par comparaison à la série harmonique (divergente), la série de terme général $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ diverge, ce qui prouve que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ diverge.

Rem: L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ s'appelle l'intégrale de Dirichlet. Elle est égale à $\frac{\pi}{2}$ (voir démonstration en exercice).

Déf 5:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

f est dite intégrable sur I si f est continue par morceaux sur I et si son intégrale sur I est absolument convergente.

Dans ce cas, on peut noter $\int_I f$ ou $\int_I f(t) dt$ cette intégrale.

Rem: Lorsque $I = [a; b[$ (resp. $]a; b]$), on pourra dire simplement : « f est intégrable en a » (resp. en b).

Prop 8:

L'ensemble noté $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{K})$.

 Démonstration:

En effet, cet ensemble est non vide car il contient la fonction nulle, et si f, g sont intégrables sur I et si $\lambda \in \mathbb{K}$, l'intégrale $\int_I (\lambda f + g)$ est absolument convergente puisque $|\lambda f + g| \leq |\lambda| |f| + |g|$, et d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives.

L'étude de l'absolue convergence (=intégrabilité) permet d'utiliser certains critères de comparaison même lorsqu'on ne connaît pas le signe de la fonction. On a le résultat suivant, que l'on a énoncé dans le cas d'un intervalle $[a; b[$, mais qui s'adapte sans problème au cas d'un intervalle $]a; b]$.

Théorème 8:

Soient f et g continues par morceaux sur $[a; b[$, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Si $|f| \leq |g|$ au voisinage de b , alors l'intégrabilité de g sur $[a; b[$ implique celle de f .
2. Si $f = O(g)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a; b[$ implique celle de f .
3. Si $f = o(g)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a; b[$ implique celle de f .
4. Si $f \sim g$, alors l'intégrabilité de f sur $[a; b[$ est équivalente à celle de g .

 Démonstration:

En effet, la relation $f = O(g)$ (par exemple) équivaut à $|f| = O(|g|)$.

Si g est intégrable, alors $\int_a^b |g|$ existe, et il résulte alors du critère de comparaison pour les fonctions à valeurs réelles positives que $\int_a^b |f|$ est convergente, d'où le résultat.

L'utilisation de ce théorème simplifie la rédaction, comme vous pouvez le constater dans les exemples ci-dessous.

Exemples

1. Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{x\sqrt{1+x^2}} dx$.

 Solution:

Soit $f: x \mapsto \frac{\sin \sqrt{x}}{x\sqrt{1+x^2}}$ pour $x > 0$.

- f est continue sur $\mathbb{R}_+$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues.
- Au voisinage de 0^+ on a $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$; or la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 0 (fonction de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$), il en est donc de même pour f .
- Au voisinage de $+\infty$ on a $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ (puisque $|\sin \sqrt{x}| \leq 1$ et $\sqrt{1+x^2} \geq x$); or la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de Riemann avec $2 > 1$), il en est donc de même pour f .

En conclusion, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour quelle(s) valeurs du réel $a \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} \right) dx$ est-elle convergente ? Est-elle alors absolument convergente ?

 **Solution:**

La fonction $f: x \mapsto \ln \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} \right)$ est continue sur $[1; +\infty[$: en effet, pour tout $x > 0$, $\sin x > -\sqrt{x}$ (faites un dessin!), et $\frac{a}{x} \geq 0$ donc $1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} > 0$.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$ on effectue un développement limité, en utilisant $\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + O(h^3)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} \right)^2 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} - \frac{\sin^2 x}{2x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

puisque $h = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}$ est un $O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Il reste à étudier l'intégrabilité de ces fonctions.

Pour étudier l'existence de l'intégrale de $\frac{\sin^2 x}{x}$, on linéarise :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} - \frac{1 - \cos 2x}{2x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos 2x}{4x} + \frac{a - 1/4}{x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \quad (*)$$

Or, on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ existe (cf. intégrale de Dirichlet), et on démontrerait de la même façon, à l'aide d'une intégration par parties (afin d'augmenter le degré du dénominateur), que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ existent. De plus, une fonction qui est un $O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$ y est intégrable, par comparaison à une fonction de Riemann. Il résulte alors de l'égalité (*) que l'intégrale de f sur $[1; +\infty[$ existe si et seulement si celle de $\frac{a-1/4}{x}$ existe, ce qui n'est possible que si $a = \frac{1}{4}$.

Dans ce cas, $f(x) = \ln \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4x} \right)$; on a donc $|f(x)| \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right|$. Or pour $x \geq 1$, $\sqrt{x} \leq x$ donc $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right| \geq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq 0$, et puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ diverge (cf. intégrale de Dirichlet), il en est de même de $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right| dx$ et par équivalence, de $\int_1^{+\infty} |f|$.

Conclusion : l'intégrale proposée converge si et seulement si $a = \frac{1}{4}$, mais n'est alors pas absolument convergente.